REMat
ISSN 2177-5095
nº3 - 2013
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

O Uso de P.G. em Divisões por 11

Rogério César dos Santos
Professor da UNB-FUP.
professorrogeriocesar@gmail.com

Resumo

Neste trabalho, mostraremos uma aplicação da Progressão Geométrica, em uma técnica de divisão por 11. Trata-se de um algoritmo para efetuar a divisão de certos números inteiros por 11.

Palavras-chaves: Divisão de inteiros, Progressão Geométrica

Dividing by 11 using geometric progression

Abstract

In this work we show an application of geometric progression in a technique to divide by 11. It is an algorythm that can divide some integers by 11.

Keywords: Integer division, geometric progression.

1 Introdução

Neste artigo, vamos aprender uma regra prática que permite dividir todos os números da forma $\alpha 00...00\alpha$ por 11, onde $\alpha = 1, 2, ..., 9$. Vamos verificar também em quais situações a divisão pode ser feita até mentalmente.

Para começar, vejamos estes exemplos:

a) ${}^{500.005}/_{11} = 45.455$

b) ${}^{101}/_{11} = 9,1818...$

c) $30.003 = 2.727,5454...$

d) ${}^{1.000.001}/_{11} = 90.909,1818...$

e) ${}^{606}/_{11} = 55,0909...$

f) ${}^{1.001}/_{11} = 91$

g) ${}^{80.000.008}/_{11} = 7.272.728$

2 Caso 1: a quantidade de zeros no número $\alpha 00...00\alpha$ é par

Proposição 1. *Se a quantidade de zeros é par, digamos $2n$, $n > 0$, então o resultado da divisão de $\alpha 00...00\alpha$ por 11 será* $9\alpha\left[10^1 + 10^3 + ... + 10^{2n-1}\right] + \alpha$.

Na prática, isto equivale a escrever o número 9α por n vezes, e depois o α. Porém, se $\alpha = 1$, $9\alpha = 9$, e escreve-se "09" n vezes, e depois 0 α. Ou seja, o resultado é sempre inteiro.

A demonstração será feita no final do artigo. Acompanhe agora como podemos aplicar esta proposição nos exemplos acima:

No exemplo a), $2n = 4$, $n = 2$, $\alpha = 5\, e\, 9\alpha = 45$. Devemos escrever 45 po 2 vezes, depois o 5. Resultado: 45.455.

No exemplo f), $2n = 2$, $n = 1$, $\alpha = 1\, e\, 9\alpha = 9$. Devemos escrever 09 por 1 vez depois o 1. Resultado: 091 ou 91.

No exemplo g), $2n = 6$, $n = 3$, $\alpha = 8\, e\, 9\alpha = 72$. Devemos escrever 72 por 3 vezes, depois o 8. Resultado: 7.272.728.

Observe que o cálculo é bastante simples, e até mentalmente pode ser feito.

Agora você leitor, tente resolver, pela regra prática apresentada, as divisões (respostas no final):

a)4.004 por 11
b)50.000.005 por 11
c) 100.001 por 11
d) 9.000.000.009 por 11

3 Caso 2: a quantidade de zeros no número $\alpha 00...00\alpha$ é impar

Proposição 2. *Se a quantidade de zeros é impar, digamos $2n + 1$, n maior ou igual a zero, então o resultado da divisão de $\alpha 00...00\alpha$ por 11 será* $9\alpha\left(10^0 + 10^2 + 10^4 + ... + 10^{2n}\right) + (2.9\alpha)\left({}^1/_{10^2} + {}^1/_{10^4} + {}^1/_{10^6} + ...\right)$.

Na prática, isto equivale a escrever 9α por $n+1$ vezes, e acrescentar, a este número, a soma infinita $\left[(2.9\alpha).\left(1/10^2+1/10^4+1/10^6+...\right)\right]$. Mas, novamente, se $\alpha=1$, $9\alpha=9$, e escreve-se "09"$n+1$ vezes, e depois acrescenta-se a referida soma infinita.

A demonstração também será feita no final do artigo. Acompanhe agora como podemos aplicar esta proposição nos exemplos apresentados no início do artigo:

No exemplo b), $2n+1=1$, $n+1=1$, $\alpha=1$, $9\alpha=9\,e\,2.9\alpha=18$. Então, escrevemos 9 por 1 vez, e depois devemos acrescentar $0,18+0,0018+0,000018+...$

Resultado: $9,1818...$

No exemplo c), $2n+1=3$, $n+1=2$, $\alpha=3$, $9\alpha=27\,e\,2.9\alpha=54$. Então, escrevemos 27 por 2 vezes, depois acrescentamos $0,54+0,0054+0,000054+...$

Resultado: $2.727,5454...$

No exemplo d), $2n+1=5$, $n+1=3$, $\alpha=1$, $9\alpha=9\,e\,2.9\alpha=18$. Então, escrevemos 09 por 3 vezes, e depois devemos acrescentar $0,18+0,0018+0,000018+...$

Resultado: $090.909,1818...$ ou $90.909,1818...$

No exemplo e), $2n+1=1$, $n+1=1$, $\alpha=6$, $9\alpha=54\,e\,2.9\alpha=108$. Então escrevemos 54 por 1 vez, e depois devemos acrescenar $1,08+0,0108+0,000108+...$

Resultado: $54+1,08+0,0108+0,000108+...=55,090909...$

Agora novamente você leitor, tente resolver, pela regra prática apresentada, as divisões (respostas no final):

a) 40.004 por 11
b) 500.000.005 por 11
c) 1.000.001 por 11
d) 90.000.000.009 por 11
e)303 por 11
f) 202 por 11

4 As demonstrações

As demonstrações a seguir utilizam as fórmulas das somas das P.G.'s finita e infinita, encontradas em [PAIVA, 1995], por exemplo.

4.1 Demonstração da proposição 1

Suponha que o número de zeros é par, $2n$. Neste caso, o número $\alpha00...00\alpha$ pode ser escrito da forma $10^{2n+1}\alpha+\alpha$. Vamos provar que $\left[10^{2n+1}\alpha+\alpha\right]/11=9\alpha\left[10^1+10^3+...+10^{2n-1}\right]+\alpha$.

Usando a fórmula da soma dos termos de uma P.G. finita, dada em (1), temos:

$9\alpha\left[10^1+10^3+...+10^{2n-1}\right]+\alpha=9\alpha\left[10.\left(10^{2n}-1\right)/\left(10^2-1\right)\right]+\alpha=9\alpha\left(10^{2n+1}-10\right)/99+\alpha=\alpha\left(10^{2n+1}-10\right)/11+\alpha=\left(10^{2n+1}\alpha-10\alpha\right)/11+\alpha$. Multiplicando esta expressão por 11, obtemos: $11\left[\left(10^{2n+1}\alpha-10\alpha\right)/11+\alpha\right]=10^{2n+1}\alpha-10\alpha+11\alpha=10^{2n+1}\alpha+\alpha$, como queriamos demonstrar.

4.2 Demonstração da Proposição 2

Suponha que o número de zeros é impar, $2n+1$. Neste caso, o número $\alpha 00...00\alpha$ pode ser escrito da forma $10^{2n+2}\alpha+\alpha$. Vamos provar que $\left[10^{2n+2}\alpha+\alpha\right]/11=9\alpha\left(10^0+10^2+10^4+...+10^{2n}\right)+(2.9\alpha).\left(1/10^2+1/10^4+1/10^6+...\right)$.

Usando as fórmulas da soma dos termos de uma P.G. finita e infinita, temos:

$$9\alpha\left(10^0+10^2+10^4+...+10^{2n}\right)+(2.9\alpha).\left(1/10^2+1/10^4+1/10^6+...\right)=$$

$$9\alpha\left[\left(10^0.\left(10^{2(n+1)}-1\right)/\left(10^2-1\right)\right)\right]+(2.9\alpha)\left\{\left({}^1/_{10^2}\right)/\left[1-\left({}^1/_{10^2}\right)\right]\right\}=$$

$$9\alpha\left[\left(10^{2(n+1)}-1\right)/99\right]+(2.9\alpha).\left\{(1/100)/(99/100)\right\}=$$

$$\alpha\left[\left(10^{2(n+1)}-1\right)/11\right]+(2.9\alpha).1/99.$$

Multiplicando esta expressão por 11, temos:

$$11.\left\{\alpha\left[\left(10^{2(n+1)}-1\right)/11\right]+(2.9\alpha).1/99\right\}=$$

$$\alpha\left(10^{2(n+1)}-1\right)+(2.9\alpha).1/9=$$

$$\alpha 10^{2(n+1)}-\alpha+2\alpha=$$

$$\alpha 10^{2n+2}+\alpha,$$

como queriamoa demonstrar.

Observa-se que se o número de zeros for par, então a divisão pode ser feita mentalmente com bastante facilidade.

Se o número de zeros for impar, com α de 1 até 5, também é simples efetuar a divisão por 11 mentalmente. Se $\alpha>5$, porém, então fica um pouco mais dificil dividir mentalmente, apesar de ainda ser bastante fácil aplicar a regra prática.

Resposta das divisões propostas;

Caso 1:

a) 364

b) 4.545.455

c) 9.091

d) 818.181.819

Caso 2:

a) 3.636,7272

b) 45.454.545,9090...

c) 90.909,1818...

d) 8.181.818.182,6363...

e) 27,5454...

f) 18,3636...

5 Conclusão

Observa-se que a simples curiosidade, de como dividir números da forma $\alpha 00...00\alpha$ por 11, pode nos levar a uma bela aplicação das progressões geométricas. É um belo trinamento que se pode trabalhar com alunos do Ensino Médio, e também com alunos de graduação em Matemática, para que os mesmos possam ser suscitados a descobrir outras regras e padrões dentro da matemática.

Referências

[PAIVA,1995] . Paiva, M. Matemática 2. São Paulo: Moderna, 1995