REMat
ISSN 2177-5095
nº3 - 2013
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

Parábolas gêmeas

Rogério César dos Santos
Professor da UNB-FUP.
professorrogeriocesar@gmail.com

Resumo

A partir de uma dada parábola p e seu foco F, vamos construir uma curva c obtida pelo prolongamento do segmento que liga F aos pontos da parábola p. Veremos que a curva c assim construída possui características comuns com a parábola original, o que nos motivou a chamá-las gêmeas.

Palavras-chaves: Parábola, geometria analítica, função do segundo grau.

Twin parabolas

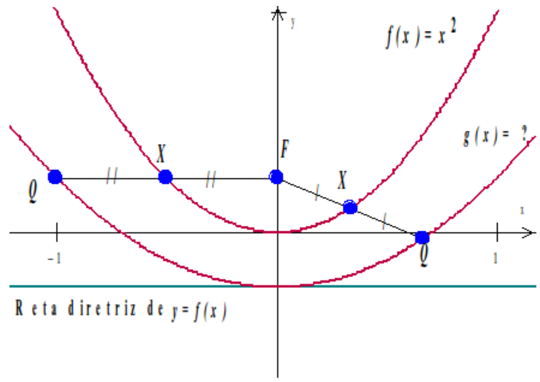
Abstract

Given a parabola p and his focus F, we build a curve c by prolonging the line segment between F and the points of the parabola p. We'll see that the curve c thus built have common features with the original one, so that we call them twins.

Keywords: Parabola, analytic geometry, quadratic function.

1 Introdução

Minha esposa e eu estamos esperando gêmeos, de uma só placenta. Pela placenta os dois bebês se alimentam pelos respectivos cordões umbilicais. Os cordões são como que prologamentos da mesma placenta. Isso me motivou a pensar no seguinte problema da geometria analítica: dados a parábola de equação $f(x) = x^2$ com foco F e os pontos $X = (x, x^2)$ sobre seu gráfico, encontrar a equação da curva $y = g(x)$ (figura abaixo) constituída pelos pontos Q obtidos pelo prolongamento dos segmentos FX tais que $FX = XQ$, Q é externo à parábola e F, X e Q estão alinhados . Se a curva $y = g(x)$ formada pelos pontos Q for também uma parábola, batizarei as duas de parábolas gêmeas. Ao final, ainda teremos outro motivo para chamá-las de gêmeas, aguarde!



2 A equação da curva gêmea

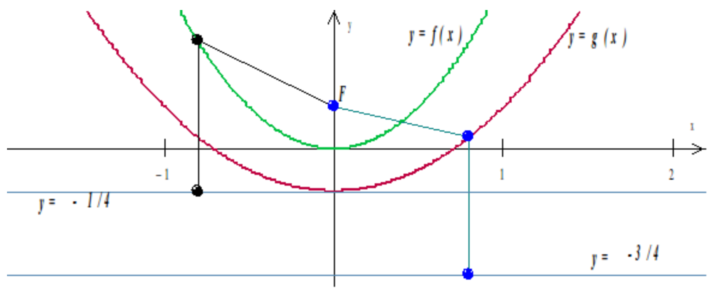
Relembremos que o foco da parábola $y = \frac{1}{2p} \cdot x^2$ é o ponto $\left(0, \frac{p}{2}\right)$. Este fato pode ser constatado em [BUCCHI, 1998], por exemplo. No nosso exemplo, a função $y = x^2$ possui foco $F = (0, \frac{1}{4})$ e reta diretriz $y = -\frac{1}{4}$. Por sua construção, vemos que a curva $y = g(x)$ possui um ponto mínimo em $(0, -\frac{1}{4})$ pertencente à reta diretriz da parábola $f(x) = x^2$. Considere o triângulo formado pelos vértices $F = (0, \frac{1}{4})$, $X = (x, x^2)$ tal que $0 < x^2 < \frac{1}{4}$, e $R = (x, \frac{1}{4})$. Então, este triângulo é retângulo em R. Considere também o triângulo retângulo formado pelos vértices $F(0, \frac{1}{4})$, $Q = (a, b)$ e $S = (a, \frac{1}{4})$. Este triângulo é retângulo em S. Pela semelhança dos dois triângulos, temos $\dfrac{FX}{FQ} = \dfrac{x}{a} = \dfrac{\frac{1}{4} - x^2}{\frac{1}{4} - b}$. Daí, como $FQ = 2FX$, temos que $\frac{1}{2} = \frac{x}{a}$, ou seja, $a = 2x$. Além disso, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\frac{1}{4} - x^2}{\frac{1}{4} - b}$. Assim, $\frac{1}{4} - b = \frac{1}{2} - 2x^2$, ou seja, $b = 2x^2 - \frac{1}{4}$. Conclusão: $Q = (a, b) = \left(2x\, , 2x^2 - \frac{1}{4}\right)$ para $0 < x^2 < \frac{1}{4}$. Veremos agora se os casos $x^2 = 0$ e $x^2 = \frac{1}{4}$ também são regidos pela mesma fórmula de Q que encontramos.

Se $x^2 = 0$, então $x = 0$ e, de acordo com a construção geométrica do ponto Q, estamos no ponto de mínimo $(0, -\frac{1}{4})$ da função $y = g(x)$. Por outro lado, substituindo x por zero nas fórmulas que encontramos para a e b, temos: $a = 0$ e $b = 2 \cdot 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$, ou seja, a fórmula que encontramos para Q também vale para o caso $x^2 = 0$.

No caso $x^2 = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ e, pela construção, FQ é paralelo ao eixo x, ou seja, $a = 2x = 1$ e $= \frac{1}{4}$. Por outro lado, substituindo $x = \frac{1}{2}$ nas fórmulas de a e de b, $a = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, e $b = 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Logo, a fórmula de Q vale para todo x tal que $0 \leq x^2 \leq \frac{1}{4}$. De forma inteiramente análoga, demonstra-se que a mesma fórmula vale para o caso $x^2 > \frac{1}{4}$ e também para o caso $x < 0$. Daí, chegamos à conclusão de que $Q = \left(2x, 2x^2 - \frac{1}{4}\right)$ para todo x real. Fazendo $t = 2x$, temos que $2x^2 = 2x \cdot x = t \cdot \frac{t}{2} = \frac{t^2}{2}$, isto é, $Q = \left(t, \frac{t^2}{2} - \frac{1}{4}\right)$ para todo t real, também uma parábola. Enfim, $g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}$ é a curva procurada, a parábola gêmea.

3 Um motivo a mais para serem gêmeas

Obseve que esta parábola $y = g(x)$ gêmea nada mais é do que a translação da parábola $h(x) = \frac{x^2}{2}$ 0,25 unidade para baixo. Logo, o foco da nossa parábola $y = g(x)$ é o ponto $\left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ e reta diretriz $y = \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-3}{4}$. Mas que bela surpresa: ambas possuem o mesmo foco, mais um motivo para chamá-las de gêmeas. Veja na figura a seguir as duas parábolas com o foco comum e as respectivas retas diretrizes.



Referências

[BUCCHI-1998] BUCCHI, P. Curso Prático de Matemática. 1a edição. São Paulo: Moderna, 1998