

# ESQUEMA DE DIFERENÇAS FINITAS COM MALHA STAGGERED APLICADO EM UM MODELO DE MAGNETOHIDRODINÂMICA TURBULENTO.

Raphael O. Garcia

Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP.  
gr.gubim@gmail.com

Sônia M. Gomes

Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP.  
soniag@ime.unicamp.br

Samuel R. Oliveira

Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP.  
samuel@ime.unicamp.br

## Resumo

Neste trabalho realizamos experimentos numéricos de um modelo de magnetohidrodinâmica turbulento. Para isto, discretizamos as equações através do método de diferenças finitas explícito, com uma malha staggered, e as reescrevemos com dois parâmetros: o número de Reynolds e o número de CFL. Avaliamos, por meio da análise de von Neumann, a estabilidade do método em função dos valores de Reynolds e CFL, e por fim, implementamos o modelo com condição inicial de dados aleatórios utilizando valores adequados de Reynolds e CFL.

**Palavras-chaves:** Diferenças Finitas, Malha Staggered, Magnetohidrodinâmica.

## FINITE DIFFERENCE SCHEME WITH STAGGERED MESH APPLIED ON A MODEL MAGNETOHYDRODYNAMIC TURBULENCE

## Abstract

In this work we performed numerical experiments on a Model magnetohydrodynamic turbulence. For this, the differential equations were discretized by the explicit finite difference method with a staggered mesh, and we rewrote the equations with two parameters: the Reynolds number and the number of CFL. We evaluated, by analyzing the von Neumann, the stability method based on the values of Reynolds and CFL, and finally, we implemented the model with the initial condition of random data using appropriate values of Reynolds and CFL.

**Keywords:** Finite Difference Method, Staggered Mesh, Magnetohydrodynamic.

## 1 Introdução

O estudo de métodos numéricos para o escoamento de fluido eletricamente carregado, através das equações de magnetohidrodinâmica (MHD), teve grande importância para a compreensão deste fenômeno em diversas áreas da ciência, tais como astrofísica, física de plasma e física espacial. Muitos dos modelos elaborados são descritos por equações diferenciais não lineares, que exigem tratamentos adequados no momento da implementação de um método numérico e mesmo modelos simplificados apresentam dificuldades na descrição numérica dos termos não lineares.

Neste trabalho fizemos um detalhamento do estudo apresentado por Thomas [THOMAS-1968] e apresentamos uma análise de estabilidade de von Neumann [THOMAS-1995] para o caso linear.

## 2 O modelo

O modelo em estudo descreve o escoamento de um fluido eletricamente carregado, com carga elétrica líquida nula. O modelo é representado pelas seguintes equações de Magnetohidrodinâmica incompressível [BISCAMP-1993],

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - h \cdot \nabla \mathbf{h} = -\nabla \mathbf{w} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{h} - h \cdot \nabla \mathbf{u} = \nu \nabla^2 \mathbf{h}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{h} = 0, \quad (3)$$

em que  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$  são a velocidade e o campo magnético do fluido,  $\mathbf{w}$  é a pressão total,  $\nu$  é a viscosidade cinemática e  $\lambda$  é a difusibilidade magnética.

Em particular, implementamos computacionalmente o seguinte problema unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - 3h \frac{\partial h}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Essas equações têm um papel importante no estudo de turbulência hidrodinâmica e apresentam duas características que controlam os resultados: a primeira é o estiramento (alongamento) das linhas do campo magnético, descrito pelo gradiente de velocidade, e a segunda é o rompimento das linhas do campo magnético, representado pelo gradiente do campo magnético.

O estiramento, descrito pelo termo  $h \cdot \nabla \mathbf{u}$ , implica em um acréscimo de energia magnética, enquanto que o rompimento, representado pelo termo  $u \cdot \nabla \mathbf{h}$  conduz a um decréscimo da escala

de comprimento local, resultando em um acréscimo na dissipação magnética e na diminuição da energia magnética.

### 3 O método numérico

O desenvolvimento do esquema numérico foi feito através do método de diferenças finitas, com uma **malha staggered** [ROBERTS-1966], representada pela Figura (1).

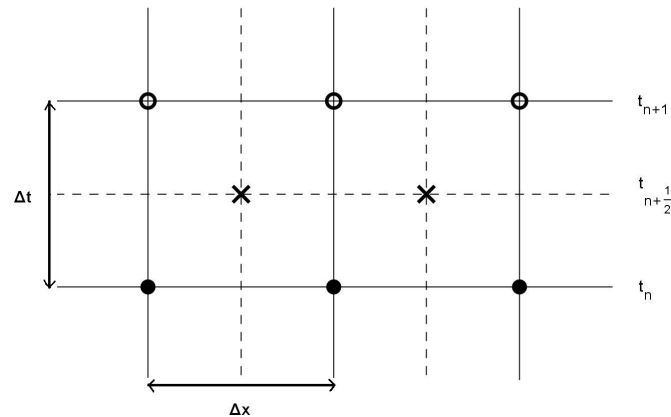


Figura 1: Malha Staggered - os pontos preenchidos e em forma de 'x' são conhecidos e os pontos vazios no centro representa os pontos a serem determinados, para ambos os campos.

Assim, dada a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L[u] = 0, \quad (6)$$

a semi-discretização no tempo, utilizando o **esquema de diferenças finitas centrado** [THOMAS-1995], é dada por

$$\frac{u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)}{\Delta t} + L[u](x, \bar{t}_n) = 0. \quad (7)$$

em que  $t_n = n\Delta t$  e  $\bar{t}_n$  é o ponto médio do intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$ , isto é,  $\bar{t}_n = t_n + \frac{\Delta t}{2}$ .

Considerando a malha staggered, a discretização espacial do operador  $L[u](x, \bar{t})$  é feita utilizando o esquema de diferenças finitas centrado. Assim, este esquema foi aplicado nas equações (4) e (5).

Dada uma malha uniforme no intervalo  $[0, L]$ , defini-se  $u_j^n \cong u(j\Delta x, n\Delta t)$ . Escrevendo a equação (4) na forma conservativa, isto é,

$$u_t + \frac{1}{2} (u^2)_x - \frac{3}{2} (h^2)_x = u_{xx}$$

e aplicando o esquema de diferenças finitas centrado, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{1}{2\Delta x} \left( (u^2)_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - (u^2)_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{3}{2\Delta x} \left( (h^2)_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - (h^2)_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} \right) = \\ = \frac{4\nu}{\Delta x^2} \left[ (u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}) - (u_j^{n+1} + u_j^n) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left( 1 + 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_j^{n+1} = \left( 1 - 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_j^n + 4\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}) + \\ + \frac{3}{2\Delta x} \left( (h^2)_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - (h^2)_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2\Delta x} \left( (u^2)_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - (u^2)_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Procedendo de modo análogo, obtemos a discretização para a equação do campo magnético, equação (5),

$$\begin{aligned} \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} + \left( \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2\Delta x} \right) (h_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - h_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}) + \\ - \left( \frac{h_j^{n+1} + h_j^n}{2\Delta x} \right) (u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{4\lambda}{\Delta x^2} \left[ (h_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + h_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}) - (h_j^{n+1} + h_j^n) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left[ 1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}) + 4\frac{\lambda\Delta t}{\Delta x^2} \right] h_j^{n+1} = \left[ 4\frac{\lambda\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_j^{n+1} - u_j^n) \right] h_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} \\ \left[ 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}) - 4\frac{\lambda\Delta t}{\Delta x^2} \right] h_j^n + \left[ 4\frac{\lambda\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_j^{n+1} - u_j^n) \right] h_{j+1}^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

## 4 Estabilidade Numérica

Para a análise de estabilidade, consideramos o caso linear das equações (4) e (5), isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} - 3H \frac{\partial h}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} - H \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (13)$$

em que  $U$  e  $H$  são constantes positivas.

Definimos o número de Reynolds -  $R$ , número de CFL -  $C$  e número de Reynolds magnético -  $R_m$ ,

$$R = \frac{U\Delta x}{\nu}, \quad C = \frac{U\Delta x}{\Delta t} \quad \text{e} \quad R_m = \frac{U\Delta x}{\lambda},$$

em que  $U = \max_{x \in [0, 2\pi]} |u(x, 0)|$ ,  $H = \alpha U$ ,  $\alpha$  constante e  $\beta = R/R_m$ .

Reescrevendo as equações (12) e (13) com esses parâmetros, obtemos

$$\begin{aligned} \left(1 + 4\frac{C}{R}\right) u_j^{n+1} &= \left(1 - 4\frac{C}{R}\right) u_j^n + \left(\frac{4}{R} - 1\right) C u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \\ &+ \left(\frac{4}{R} + 1\right) C u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} + 3\alpha C \left(h_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - h_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

e

$$\begin{aligned} \left(1 + 4\beta\frac{C}{R}\right) h_j^{n+1} &= \left(1 - 4\beta\frac{C}{R}\right) h_j^n + \alpha C \left(u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ &+ \left(\frac{4\beta}{R} - 1\right) C h_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{4\beta}{R} + 1\right) C h_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Aplicando o critério de estabilidade de von Neumann [THOMAS-1995], consideramos

$$u_j^n = u_0 A^n e^{ij\xi} \quad \text{e} \quad h_j^n = h_0 A^n e^{ij\xi}, \quad (16)$$

onde  $\xi = 2\pi\Delta x/L$  é o ângulo de fase,  $[u_0 \ h_0]^T$  é o autovetor do problema e  $A(\xi)$  é o fator de amplificação.

Substituindo as expressões (16) nas equações (14) e (15) do esquema, temos

$$\begin{bmatrix} aA^2 + bA + c & dA \\ \bar{d}A & \bar{a}A^2 + \bar{b}A + \bar{c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ h_0 \end{bmatrix} = 0, \quad (17)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \left(1 + \frac{4C}{R}\right), & b &= 2C \operatorname{isen}(\xi) - \frac{8C}{R} \cos(\xi), & c &= \left(1 - \frac{4C}{R}\right), \\ d &= -6\alpha C \operatorname{isen}(\xi), & \bar{a} &= \left(1 + \frac{4\beta C}{R}\right), & \bar{b} &= 2C \operatorname{isen}(\xi) - \frac{8\beta C}{R} \cos(\xi), \\ \bar{c} &= \left(1 - \frac{4\beta C}{R}\right) & e & & \bar{d} &= -2\alpha C \operatorname{isen}(\xi). \end{aligned}$$

Para que o sistema (17) tenha solução diferente de zero, o determinante da matriz do sistema deve ser igual a zero, logo

$$(aA^2 + bA + c)(\bar{a}A^2 + \bar{b}A + \bar{c}) - d\bar{d}A^2 = 0. \quad (18)$$

Para cada valor de  $\xi \in [0, 2\pi]$ , temos um polinômio de grau 4. Determinando todas as raízes desses polinômios considerou-se apenas a raiz de maior módulo, portanto, para cada valor de  $R$  e  $C$ , temos um número  $A(R, C)$  definido pela raiz de maior módulo.

Tomando  $R = R_m$  e  $\alpha = 0,2$ , encontramos os valores de  $A(R, C)$  para  $R \in [5, 25]$  e  $C \in (0, 1]$  expostos na figura (2).

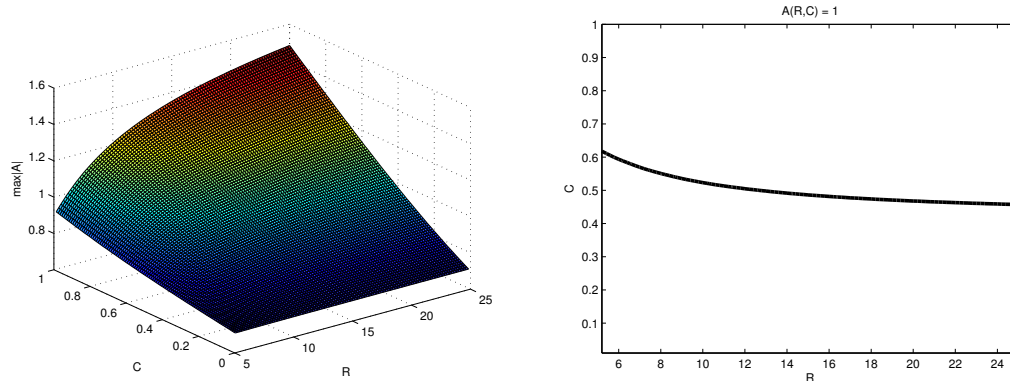


Figura 2: À esquerda temos os valores de  $A(R, C)$  obtido da análise de estabilidade e à direita temos a curva de nível para  $A(R, C) = 1$ .

O nosso interesse é saber quais são os valores de  $R$  e  $C$  que resultam em  $A(R, C) \leq 1$ , pois para esses valores o esquema é estável. Para isto, encontramos a curva de nível da superfície na figura (2) que satisfaça  $A(R, C) = 1$ . Assim, obtemos uma curva que nos fornece a região de estabilidade do esquema numérico, figura (2) à direita.

Por exemplo, na curva da figura (2), para  $R = 20$  temos que  $C \cong 0,5$ , assim podemos escolher qualquer valor de  $C$  que satisfaça  $C \lesssim 0,5$  para que o esquema seja estável.

## 5 Experimentos Numéricos

Estabelecidos os critérios para que o método seja estável, implementamos computacionalmente as equações (9) e (11). Assim, simulamos o seguinte experimento.

Sejam  $u(x, 0) = \text{sen}(x)$ , para  $x \in [0, 2\pi]$  e  $h(x, 0) = 0, 2.u(x, 0)$  como condições iniciais para as equações (4) e (5). Para o problema ficar bem posto precisamos impor as condições de fronteira.  $R = R_m = 20$  e  $C = 0,5$ .

No contorno foram consideradas condições de Dirichlet nula para a velocidade, isto é,  $u(t, 0) = u(t, L) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , para as equações (3) e (4), estas mesmas condições ocorre para o campo magnético  $h$ .

Com o intuito de manter o método numérico estável, escolhemos os valores  $R = R_m = 20$  e  $C = 0,5$  observando a figura (2). Para a discretização espacial tomamos  $\Delta x = 2\pi/256$  e para o espaçamento temporal tomamos  $\Delta t = C.\Delta x/U$ .

Da evolução temporal obteve-se os gráficos da figura (3) que representam o escoamento de um fluido eletricamente carregado, com um campo magnético fraco.

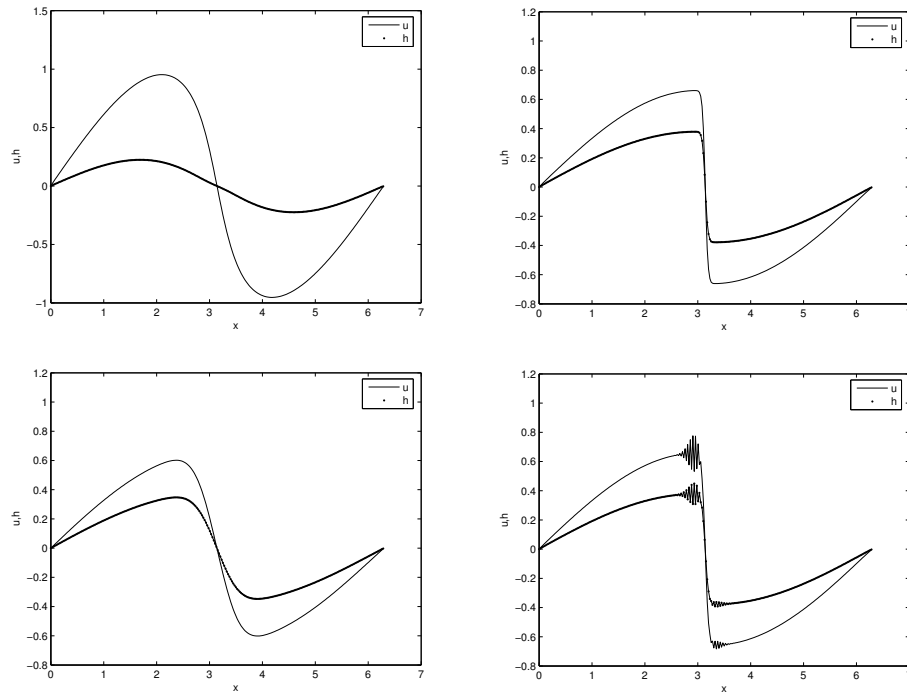


Figura 3: Evolução temporal dos campos  $u$ , representado pela linha mais fina, e  $h$ , representado pela linha mais grossa e pontos. Nos gráficos acima temos, à esquerda 50 iterações e à direita 500. Nos gráficos abaixo temos, à esquerda 5000 iterações e à direita temos o esquema instável para  $C = 0,6$ .

Fazendo a simulação para os mesmos valores anteriores, porém agora utilizando  $C = 0,6$ , o esquema numérico torna-se instável, figura (3). Isso mostra-se coerente com a análise de estabilidade apresentada na seção anterior, figura (2), onde verificou-se que  $A(R, C) > 1$  para  $C = 0,6$ .

Considerando  $u(x, 0) = u_0$ , para  $x \in [0, 1]$ ,  $h(x, 0) = 0, 2.u(x, 0)$ ,  $R = R_m = 20$  e  $C = 0,5$ , em que  $u_0$  é obtido de valores aleatórios pertencentes ao intervalo  $[-1, 1]$ , semelhante ao apresentado por [JENG et al.-1966], temos a evolução temporal representada pelos gráficos das figuras (4) e (5).

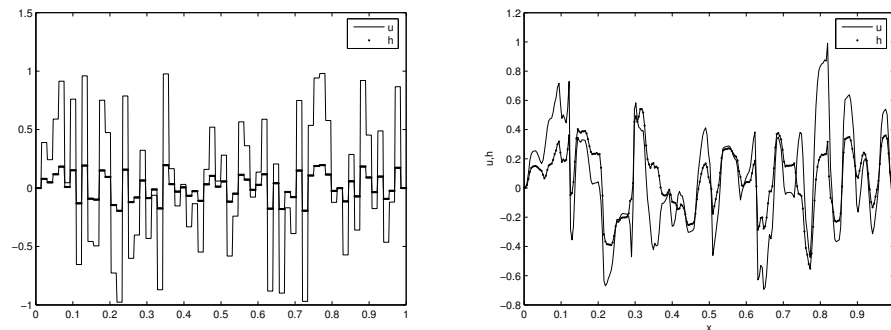


Figura 4: Nos gráficos acima temos, à esquerda a condição inicial para os campos  $u$ , representado pela linha mais fina, e  $h$ , representado pela linha mais grossa e pontos, e à direita a evolução temporal dos campos  $u$  e  $h$  com 50 iterações.

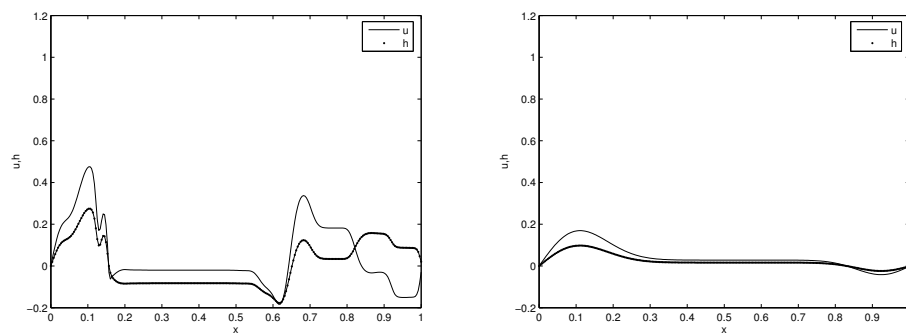


Figura 5: Nos gráficos abaixo temos, à esquerda 500 iterações e à direita 5000 iterações.

Observando os gráficos das figuras (4) e (5) verifica-se, nos tempos iniciais, a atuação dos termos responsáveis pela turbulência e, a medida que a evolução temporal avança, ocorre a atuação dos termos dissipativos das equações (3) e (4). Para um tempo suficientemente grande temos a dissipação total dos campos.

Esses resultados, para um campo magnético inicialmente fraco, estão de acordo com resultados semelhantes aos expostos na literatura, conforme [THOMAS-1968] e [JENG et al.-1966].

Agora, considerando o mesmo experimento com uma única modificação na condição inicial,  $h(x, 0) = u(x, 0)$ , faremos a simulação de um escoamento em que o campo magnético tem a mesma magnitude que o campo de velocidade. Procedendo da mesma maneira, com relação a análise de estabilidade, determinamos um valor para manter a estabilidade do esquema numérico, a saber,  $C = 0,25$ .

Logo, para os valores de  $R = R_m = 20$  e  $C = 0,25$ , obtivemos uma evolução temporal estável conforme os gráficos das figuras (6) e (7) .



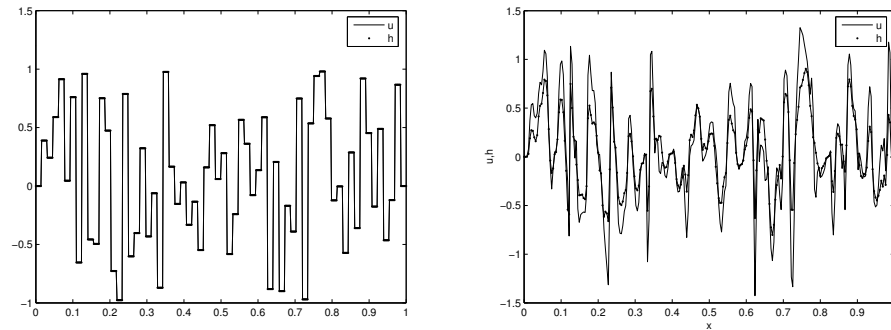


Figura 6: Nos gráficos temos, à esquerda a condição inicial para os campos  $u$ , representado pela linha mais fina, e  $h$ , representado pela linha mais grossa e pontos, e à direita a evolução temporal dos campos  $u$  e  $h$  com 50 iterações.

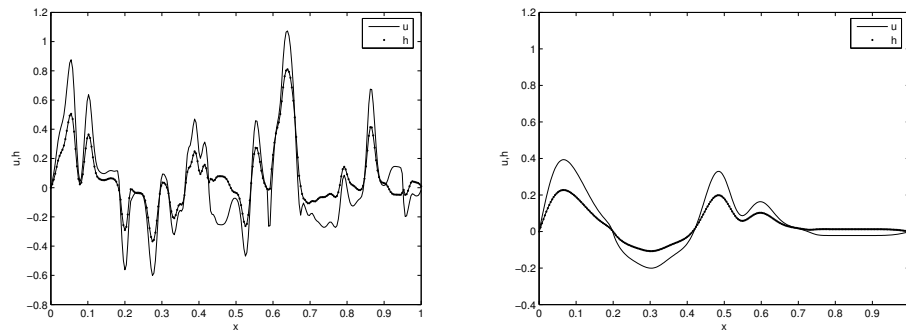


Figura 7: Nos gráficos temos, à esquerda 500 iterações e à direita 5000 iterações.

Neste caso temos a atuação dos termos turbulentos nos momentos iniciais da evolução temporal e a medida que o tempo avança, os termos dissipativos tornam-se mais efetivos.

Com esses critérios apresentados também conseguimos valores para  $C$  e  $R$  que mantém o esquema numérico estável, mesmo em situações em que o campo magnético possui a mesma magnitude que o campo de velocidade.

Assim, com a análise de von Neumann conseguimos estabelecer os valores de Reynolds e o número de CFL para manter o esquema numérico estável e, portanto, realizar experimentos numéricos confiáveis.

## 6 Conclusões

Neste trabalho considerou-se a discretização em malha staggered, usando diferenças centradas de segunda ordem, para um modelo não linear unidimensional das equações MHD. O modelo numérico conduz a um sistema explícito. Utilizando a análise de von Neumann,

estabeleceu-se limites para os parâmetros de Reynolds e do número de CFL para manter o esquema numérico estável no caso linearizado e fornecer valores confiáveis para executar experimentos numéricos confiáveis ao caso não linear. Apresentou-se resultados de simulações para o modelo não linear, obtidas sem instabilidade utilizando  $R = R_m = 20$  e  $C = 0,5$ , dentro da região de estabilidade sugerida pela análise de Von Neumann.

## Referências

- [BISCAMP-1993] D. Biskamp, **Nonlinear Magnetohydrodynamics**, Cambridge University Press, Cambridge, 1. ed, 1993.
- [JENG et al.-1966] D. T. Jeng, R. Foerster e W. C. Meecham, **Statistical Initial-Value Problem for Burgers Model Equation of Turbulence**, *The Physics of Fluids* , v. 9, n. 11, pp. 2114-2120, Nov. 1966.
- [ROBERTS-1966] K. V. Roberts and N. O. Weiss, **Convective Difference Schemes**, *Comm. Math. Phys.* , v. 20, n. 94, pp. 272-299, Apr. 1966.
- [THOMAS-1968] J. H. Thomas, **Numerical Experiments on a Model System for Magnetohydrodynamic**, *The Physics of Fluids* , v. 11, n. 6, pp. 1245-1250, Jun. 1968.
- [THOMAS-1995] J. W. Thomas, **Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods**, Springer-Verlag, New York, 1 ed, 1995.