REMat
ISSN 2177-5095
nº3 - 2013
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

Quantidade de vértices, arestas, e outros, em hipercubos

Rogério César dos Santos
UnB – FUP
professorrogeriocesar@gmail.com

Resumo

[PHILPI e HERSH – 1995] mostram uma interessante abordagem sobre o hipercubo, o nome que frequentemente é dado ao cubo em 4 dimensões. Apesar de não ser possível visualizar o hipercubo, pode-se contar o número de seus vértices, arestas e outros elementos. O livro, no entanto, apenas oferece os resultados prontos, e aqui a proposta é mostrar como estes números foram obtidos. Além disso, iremos generalizar nossas observações para cubos de dimensões maiores, isto é, vamos contar o número de vértices, arestas, faces e outros elementos que existem em um cubo de dimensão n qualquer.

Palavras-chaves: Vértices, arestas, hipercubo.

Amount of vertices, edges, and others, in hypercubes

Abstract

[PHILPI e HERSH – 1995] showed a insteresting approach on the hypercube, name frequentily given to the cube in 4 dimensions. Despite isn't possible to visualize the hypercube, one can count the number of its vertices, edges and other elements. The book, however, brings only the final results, and here we aim to show how these numbers are calculated. Furthermore, we generalize our observations to higher dimensions cubes, that is, we count the number of vertices, edges, faces and other elements of a cube in a n dimensional context.

Keywords: Vertices, edges, hypercube.

1 Como o hipercubo é formado

Vamos ver como podemos obter um cubo de dimensão n, a partir do cubo correspondente na dimensão imediatamente inferior n–1. Vamos chamar de 0-cubo (zero cubo) um ponto no plano euclidiano qualquer, de dimensão nula. Este 0-cubo é composto apenas por um vértice, que coincide com ele próprio. Vamos chamar de 1-cubo qualquer segmento de reta ligando dois pontos do plano euclidiano, de dimensão 1. O 1-cubo é chamado de aresta, e contém dois vértices, isto é, contém dois 0-cubos.

Já o 2-cubo é qualquer quadrado do plano euclidiano, de dimensão 2, juntamente com sua a região interna. O 2-cubo, assim, se confunde com uma face quadrada plana, contendo 4 arestas e 4 vértices, isto é, contendo 4 1-cubos e 4 0-cubos. O 3-cubo é cubo que já conhecemos do espaço tridimensional.

Veremos que, a partir do primeiro cubo, o 0-cubo, podemos obter todos os outros por um mesmo processo ou lógica. O 4-cubo, ou o hipercubo de dimensão 4, será o cubo obtido do cubo tri-dimensional pelo mesmo processo de obtenção dos cubos anteriores, assim como qualquer n-cubo poderá ser obtido a partir do (n–1)-cubo. O processo é o seguinte:

Seja um ponto qualquer do plano euclidiano, considerado um vértice *isolado*. Seria o nosso 0-cubo. Para criarmos o 1-cubo a partir deste, criamos uma cópia deste *vértice* em um outro local, e ligamos os dois vértices por um segmento. Obtemos, assim, uma aresta, composta por 2 vértices. Esta aresta é o próprio 1-cubo, de dimensão 1. Assim como os vértices se confundem com os 0-cubos, as arestas se confundem com os 1-cubos. Em resumo: o 0-cubo gerou outro 0-cubo, e sobre o vértice original (o próprio 0-cubo), repousa agora uma aresta. Obtemos, assim, o 1-cubo, que possui dois vértices e uma aresta, que se confunde consigo prórprio. Seja v a abreviação de vértice, a a abreviação de aresta, f de face, e c de cubo. Nesta primeira etapa, ocorreu:

$1v$ gerou $1v + 1a$. Assim, o 1-cubo possui, como total: $2v + 1a$, sendo que $1a$ é o próprio 1-cubo aí formado.

Para a obtenção do 2-cubo, vamos usar processo semelhante: primeiro reproduzimos o 1-cubo paralelamente ao 1-cubo original, sobre o plano. Depois, sobre cada um dos dois vértices originais (do 1-cubo) repousará uma aresta, e, agora, sobre a aresta original (o 1-cubo), foi criada enfim uma face. Temos, então o 2-cubo, identificado com a face criada, obtido segundo o esquema resumo seguinte: $2v + 1a$ geraram $2v + 1a$ pela reprodução do 1-cubo, além disso cada vértice original gerou uma aresta e cada aresta original gerou uma face, veja o esquema abaixo:

$2v + 1a$ geraram: $(2v + 1a) + (2a + 1f)$.

Assim, o 2- cubo possui, como total: $4v+4a+1f$. Observe que $1f$ corresponde exatamente ao 2-cubo gerado neste processo.

Observe que o processo básico para a criação do n-cubo é: reproduz-se o $(n–1)-$*cubo, e sobre cada k-cubo do* $(n–1)-$*cubo original, com* $k < n$*, será criado um novo cubo de dimensão* $k + 1$*. Assim, sobre cada vértice, será criada uma aresta. Sobre cada aresta, uma face, e assim por diante.*

2 Exemplificando o processo

Vamos obter agora o 3-cubo, de forma análoga: reproduzimos o 2-cubo, que será a *parte superior* do 3-cubo. Depois, sobre cada vértice da face original repousará uma nova aresta, sobre cada aresta original repousará uma nova face, e enfim, sobre a face original repousará agora o novo cubo. O esquema seria, portanto:

$4v+4a+1f$ geraram $(4v+4a+1f)+(4a+4f+1c)$. Assim, o 3-cubo possui, como total: $8v+12a+6f+1c$.

Agora, para gerar o 4-cubo, ficará claro para o leitor o seguinte esquema:

$8v+12a+6f+1c$ geraram $(8v+12a+6f+1c)+(8a+12f+6c+1h)$, onde h é a quantidade de 4-cubos gerados nesse passo, que é um obviamente. Logo, o 4-cubo tem: $16v+32a+24f+8c+1h$.

Ora, este processo poderia continuar. O número de vértices em um k-cubo será o dobro do número de vértices no $(k–1)$-cubo. O número de arestas em um k-cubo será a soma do dobro do número de arestas no $(k–1)$-cubo com o número de vértices no $(k–1)$-cubo. O número de faces em um k-cubo será a soma do dobro do número de faces no $(k–1)$-cubo com o número de arestas no $(k–1)-$cubo. E assim por diante.

3 Uma propriedade interessante

É interessante notar que a quantidade total de elementos de um k-cubo (contando a si mesmo) é sempre uma potência de 3, observe: o 0-cubo possui $3^0 = 1$ vértices. O 1-cubo possui 3 elementos, sendo 2 vértices e 1 aresta. O 2- cubo possui 9 elementos, o 3-cubo possui 27 elementos, o 4-cubo possui 81 elementos, todos potências de 3.

Isto é fácil de explicar, pois, no primeiro processo, o 1-cubo possui 3 elementos. Em uma etapa seguinte qualquer, com x elementos, estes x geram x elementos pela reprodução, e mais x elementos, pois cada vértice gera uma aresta, cada aresta gera uma face, cada face gera um 3-cubo, cada cubo um 4-cubo, e assim por diante. Logo, o processo seguinte terá um total de $3x$ elementos. Como o primeiro cubo possui um único elemento, a quantidade de elementos, em cada um dos processos, é:

$1, 3, 9, 27, 81, 243$, etc. O n-cubo possui, portanto, 3^n elementos.

4 Cubos dentro de cubos

Observemos agora a quantidade de vértices (0-cubos), em cada etapa:

$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$, etc. O n-cubo possui 2^n vértices, como é fácil provar por indução.

Poderíamos nos perguntar quantos k-cubos existem em um n-cubo, com $k < n$. Por exemplo, quantas arestas (1-cubos) existem em um 7-cubo? Ou quantos 3-cubos existem em um 5-cubo? Para responder a estas perguntas, vamos estabelecer uma fórmula de recorrência. Para tanto, vamos construir a tabela seguinte, com os primeiros resultados obtidos, e daí obter uma generalização para chegarmos à fórmula de recorrência. Pela tabela abaixo, por exemplo, observe que existem sessenta 4-cubos em um 6-cubo, e existem oitenta faces em um 5-cubo:

Tabela 1: o número de i-cubos (na 1a coluna) contidos em cada j-cubo (na 1 a linha).

	0-cubo	1-cubo	2-cubo	3-cubo	4-cubo	5-cubo	6-cubo
$v=$ 0-cubo	1	2	4	8	16	32	64
$a=$ 1-cubo	0	1	4	12	32	80	192
$f=$ 2-cubo	0	0	1	6	24	80	240
$c=$ 3-cubo	0	0	0	1	8	40	160
$h=$ 4-cubo	0	0	0	0	1	10	60
5-cubo	0	0	0	0	0	1	12
6-cubo	0	0	0	0	0	0	1

Vamos chamar de x_j^i o número de i-cubos contidos em um j-cubo. Assim, por exemplo, $x_6^4 = 60$. Pela forma como foi explicado anteriormente, temos: os elementos da primeira linha, que fornecem o número de vértices, e que correspondem aos termos tais que $i = 0$, são obtidos pelas potências de 2. Para os demais elementos, temos: o elemento x_j^i, para $j \geq i > 0$, será o dobro de x_{j-1}^i, mais x_{j-1}^{i-1}. Temos, portanto, a seguinte fórmula de recorrência:

$x_j^1 = 2^{j-1}$ para todo j

$x_j^i = 2 \times x_{j-1}^i + x_{j-1}^{i-1}$ para todo $j \geq i > 0$

Esta fórmula é fácil de ser implementada em uma planilha eletrônica:

Tabela 2: valores obtidos numa planilha eletrônica

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
	1	4	12	32	80	192	448	1024	2304	5120
	0	1	6	24	80	192	672	1792	4608	11520
	0	0	1	8	40	240	560	1792	5376	15360
	0	0	0	1	10	60	280	1120	4032	13440
	0	0	0	0	1	12	84	448	2016	8064
	0	0	0	0	0	1	14	112	672	3360
	0	0	0	0	0	0	1	16	144	960
	0	0	0	0	0	0	0	1	18	180
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	20
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

5 A relação de Euler nos hipercubos

Outro aspecto interessante desta tabela é o fato de que a relação de Euler, válida para o 3-cubo, $V–A+F = 2$, adaptada para cada caso, se verifica para todos os n-cubos, intercalando os resultados entre 0 e 2.

A relação de Euler generalizada para um n-cubo seria: número de vértices menos o número de arestas, mais o número de faces, menos o número de 3-cubos, mais o número de 4-cubos, $\ldots$, $+(-1)^{k-1x}$ o número de $(n–1)$-cubos $= 0$ se n é par e $= 2$ se n é ímpar.

A relação de Euler para o 0-cubo é zero por definição, pois a contagem cessa no $(n–1)-$cubo, que não existe para o 0-cubo. Como exemplo, a relação de Euler para o 4-cubo seria: $16–32 + 24–8 = 0$. Os resultados seriam os seguintes:

Tabela 3: a relação de Euler

	0-cubo	1-cubo	2-cubo	3-cubo	4-cubo	5-cubo	6-cubo
$v =$ 0-cubo	1	2	4	8	16	32	64
$a =$ 1-cubo	0	1	4	12	32	80	192
$f =$ 2-cubo	0	0	1	6	24	80	240
$c =$ 3-cubo	0	0	0	1	8	40	160
$h =$ 4-cubo	0	0	0	0	1	10	60
5-cubo	0	0	0	0	0	1	12
6-cubo	0	0	0	0	0	0	1
Relação de Euler	**0**	**2**	**0**	**2**	**0**	**2**	**0**

6 Conclusão

Observa-se que, mesmo não podendo enxergar os vértices, arestas e demais elementos num hipercubo, podemos contá-los! Tal fato pode ser de grande importância nos Ensinos Médio e Superior, pois os alunos podem perceber daí a abstração e a generalização que a Matemática sempre busca. É um assunto que pode abrir a cabeça dos estudantes, no que se refere a considerar espaços de dimensões maiores, não visualizáveis, incitando neles o pensamento abstrato.

7 Referências

[PHILPI e HERSH – 1995] DAVIS, P. J.; HERSH, R. A Experiência Matemática – Rio de Janeiro: Gradiva, 1995