REMat
ISSN 2177-5095
nº3 - 2013
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

O uso das Frações Contínuas como tema articulador no Ensino Médio

Wagner Marcelo Pommer
Professor da UNINOVE. Mestre em Educação Matemática; doutorando em Educação na FEUSP.
wmpommer@usp.br

Resumo

Apesar dos avanços das recentes propostas curriculares do ciclo básico, alguns temas matemáticos, geralmente abordados no Ensino Superior, ainda se encontram distantes do cotidiano da sala de aula. Este artigo propõe uma reflexão envolvendo aspectos curriculares, epistemológicos e didáticos para a discussão da temática das Frações Contínuas dentro da problemática do ensino secundário. O tratamento das Frações Contínuas, não como mais um componente, mas sim como um tema que permite articular e significar os próprios conhecimentos matemáticos presentes no atual currículo de Matemática. Em nível epistemológico, a rede de significados, conforme define Machado (2001), inerente às Frações Contínuas, pode ser conjugado a situações de ensino presentes em vários ramos da ciência, o que permite a re-valorização de temas da Teoria dos Números, naturalmente conjugado a um tratamento algébrico, articulando e realçando as conexões internas e externas aos próprios conhecimentos matemáticos, configurando-se numa alternativa para atualizar o currículo.

Palavras-chaves: Frações contínuas, ensino médio

Continued Fractions as an articulating theme in high school

Abstract

Despite the advances of recent curricular proposals of the basic cycle, some mathematical topics usually covered in Higher Education, are still far from the everyday classroom. This paper presents a study involving curricular aspects, epistemological and didactic to discuss the topic of Continuous Fractions within a High School context. Treatment of Continued Fractions, not as another component, but as an issue that can articulate and signify their own mathematical knowledge present in the current mathematics curriculum. On the epistemological level, the network of meanings, as defined Machado (2001), inherent to Continuous Fractions can be conjugated to teaching situations present in various branches of science, which allows the re-valuation of topics in Number Theory, naturally conjugate to an algebraic treatment, articulating and highlighting the internal and external connections to their own mathematical knowledge by

setting up an alternative to updating the curriculum.
Keywords: Continued Fractions, High School.

1 Introdução

Consideremos a equação quadrática

$$x^2 - bx - 1 = 0 \tag{1}$$

um tema usual da escola básica. Considerando-se $x \neq 0$, podemos isolar 'x' na equação 1, obtendo-se

$$x = b + \frac{1}{x} \tag{2}$$

Agora, por recorrência, podemos substituir a expressão de 'x' na própria equação 2. Assim, temos:

$$x = b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{x}} \tag{3}$$

Se estendermos este processo finito inúmeras vezes, podemos escrever a seguinte relação:

$$x = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cdots}}}}} \tag{4}$$

Um exemplo matemático que representa tal forma é o famoso número de ouro. A razão áurea representa a mais bela e (nada) elementar fração contínua simples, escrita por:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

A solução desta equação de 2º grau determina ao conhecido número de ouro $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,6180340$. Este tipo de representação das Frações Contínuas contém alguma semelhança, na forma, com as frações egípcias. Este povo utilizava as frações unitárias, de numerador 1. Poderíamos escrever alguns exemplos, conforme o quadro 1.

$\frac{1}{3}=0+\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$	$\frac{7}{4}=1+\frac{3}{4}=1=\frac{1}{\frac{4}{3}}=1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}$	$\frac{11}{8}=1+\frac{3}{8}=1+\frac{1}{\frac{8}{3}}=1+\cfrac{1}{2+\frac{2}{3}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{3}{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}$

Quadro 1: Exemplos de escrita de números racionais em frações contínuas finitas.

Esta apresentação inicial permite observar a própria denominação de Frações Contínuas. Por um lado apresenta um aspecto associado ao discreto, pelo fato de representar uma fração (relação de números inteiros) e, ainda, o fato de possuir infinitas parcelas remonta a uma natureza contínua. Assim, as:

> (...) frações contínuas constituem um exemplo interessante de procedimento que é finito, quando operado sobre números racionais, e infinito, quando o número dado é irracional. A origem das frações contínuas está na Grécia, onde as frações, para efeito de comparações, eram todas escritas com numerador '1'[CUNHA-2007, p.3].

Com relação a aspectos de atualização de temas no currículo atual de Matemática, de modo geral, na literatura são apontados alguns temas propícios para serem abordados no ciclo básico, como a Programação Linear, o Cálculo Diferencial e Integral, os Fractais, as Frações Contínuas, dentre outros.

Considerando-se uma abordagem didática adequada, a este ciclo, [SANTALÓ-1996] aponta que temas como os citados devem obrigatoriamente figurar na escola básica considerando-se a questão da cidadania e do trabalho, porém até recentemente se consideravam como assuntos a serem abordados somente no ensino superior.

Podemos comparar a proposta de atualização de temas do currículo de matemática, considerando-se, por exemplo, o ensino da Biologia e a nova revolução da genética, assunto complexo, mas que se mostrou passível de ser abordado e trazido para o cotidiano da sala de aula numa abordagem acessível a alunos do ensino básico. Também, o movimento para a renovação do Ensino de Física está discutindo a inserção de tópicos usualmente abordados somente no Ensino Superior, como alguns resultados da Física Moderna. Dentro dessa visão:

> (...) o conteúdo matemático a ser tratado na escola básica é apenas um veículo para o desenvolvimento das idéias fundamentais de cada disciplina, que devem ser convenientemente articuladas tendo em vista as funções a serem desempenhadas no currículo. É a forma de abordagem dos diferentes assuntos que distingue diferentes propostas, dando-lhes cor e substância [MACHADO-1990, p. 22].

Assim, os pressupostos delineados me alertaram a possibilidade do repensar, em nível curricular, na possibilidade de inclusão de outros temas, usualmente tratados no ensino superior, mas que poderiam ser abordados neste nível de ensino, com uma transposição didática adequada, como geradores de situações de ensino propícias.

Deste modo, acenamos para a possibilidade de um novo olhar para o currículo, concebendo a metáfora do conhecimento como rede, conforme [MACHADO-1995] e a busca de temas associados à própria disciplina de Matemática, que permite uma articulação e integração entre os próprios conceitos matemáticos vigentes no atual currículo. A idéia de rede constitui uma imagem, onde conhecer:

> (...) é como enredar, tecer significações, partilhar significados. Os significados, por sua vez, são construídos por meio de relações estabelecidas entre os objetos, as noções, os conceitos. Um significado é como um feixe de relações. O significado de algo é construído falando-se sobre o tema, estabelecendo conexões pertinentes, às vezes insuspeitadas, entre diversos temas. Os feixes de relações, por sua vez, articulam-se em uma grande teia de significações e o conhecimento é uma teia desse tipo [MACHADO-2001, p. 4].

Acredito que uma importante conexão, para se possibilitar o conhecimento como rede é "(...) estabelecer relações entre os significados dos objetos matemáticos no interior da Matemática e externamente a ela" [MACHADO-1995, p. 17]. Observo que atualmente, tal posicionamento se desloca quase com que exclusividade para o uso da contextualização, que com certeza é extremamente importante, mas que acarretou certo esquecimento em relação a exploração das importantes conexões internas, que viabiliza a articulação entre os próprios temas da Matemática.

As *Frações Contínuas* foi um tema de ensino vigente no Brasil até a década de 30 (século XX). Do ponto de vista epistemológico, este assunto foi inicialmente desenvolvido pelos gregos e que foi sendo enriquecido ao longo do desenvolvimento histórico da matemática e somente retomado a partir do século XV. A análise desse percurso histórico me fez perceber alguns nós da teia tecida por esse tema, abordando imbricações entre os Números Racionais e os Números Irracionais e que permitem o desenvolvimento de competências básicas nesta faixa de ensino.

As imbricações entre os Números Racionais e os Números Irracionais

Segundo [BROLEZZI-1996], a abordagem histórica tem importância fundamental para estruturar o trabalho didático da Matemática a ser ensinada. Isso pode ser observado com relação ao surgimento dos Números Irracionais e sua relação com os Números Racionais.

Nos livros didáticos do Ensino Básico, é usual a abordagem matemática, definindo o conjunto dos números irracionais como os números reais que não pertencem ao conjunto dos números racionais. A primeira vista, para os alunos, isto leva a crer que não existe relação entre ambos. Mas a história do desenvolvimento da matemática nos mostra outra visão.

Conforme [BOYER-1991], os povos antigos utilizavam sistematicamente aproximações numéricas. Há referência, no papiro de Ahmes, de cálculo da área de círculo em relação a área de um quadrado considerado equivalente. Alguns autores, segundo [BOYER-1991], fazem uso deste conhecimento empírico para calcular o valor de PI, fato que parece não ter sido a preocupação dos antigos egípcios. Também, há referência aos mesopotâmios em [BROLEZZI-1996], que com o uso da base sexagesimal realizaram aproximações de números irracionais.

Com relação à civilização grega e seu apego aos números naturais, [BROLEZZI-1996] argumenta que eles não consideravam como números as frações (racionais) e nem os irracionais, porém tinham conhecimento da existência destes, contornando este conflito pelo uso da Geometria para expressar estes números, o que gerou a crise dos incomensuráveis.

> Apesar de os egípcios e os povos da mesopotâmia utilizar frações e números decimais, nosso estudo mostra que somente após a identificação das grandezas incomensuráveis é que surgem de uma forma mais definitiva os próprios números racionais [BROLEZZI-1996, p. 46]

Assim, o conflito resultante da crise dos incomensuráveis, que marca o surgimento dos números irracionais, também define melhores contornos para os números racionais. É justamente este imbricamento entre os números racionais e os números irracionais que permite definir melhor estes conjuntos e, acreditamos, ser importante contribuição para o ensino de Matemática. A representação decimal dos números irracionais é necessariamente infinita e não periódica.

> Assim, a única via de acesso a um número irracional é a utilização de aproximações sucessivas através de números racionais. (...) Ainda hoje, [isto] parece desconcertar todos os que enfrentam os irracionais. (...) Negando o estatuto de números as razões entre grandezas que conduziam aos irracionais, foi possível aos gregos viver praticamente ao largo de tais objetos indesejáveis. Há muito se sabe, no entanto, que a maioria absoluta, a quase totalidade dos números reais existentes é constituída por números irracionais [MACHADO-1990, p. 43-44].

Na busca de indícios deste imbricamento nos documentos oficiais, nos PCNs, [Brasil-1997], pudemos verificar algumas citações com relação aos números irracionais, cuja abordagem é sugerida pela questão dos incomensuráveis, em particular da relação da diagonal e o lado do quadrado, pela construção geométrica das raízes sucessivas não exatas de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\cdots$ através do uso do Teorema de Pitágoras, assim como pelo cálculo aproximado através da representação decimal racional destas raízes não-exatas e do número PI, sugerindo localizá-las na reta real.

[BROLEZZI-1996] argumenta que a tensão entre os dois conjuntos leva necessariamente a questão de como administrá-la em favor do ensino e da aprendizagem em matemática. Acreditamos que o tema das Frações Contínuas possibilita contribuir para administrar este jogo.

Neste texto, do ponto de vista didático, fará recurso a situações contextuadas, que permitem ilustrar a utilização das Frações Contínuas e explorar uma série de procedimentos alternativos. Ainda, julgamos importante a exploração de diversas estratégias de resolução, conforme recomendam [Polya-1944] e [ECHEVERRÍA&POZO-1998], antes de trabalhar os algoritmos, em se considerando o ensino secundarista, pois permite introduzir tal tema e resgatar propriedades fundamentais dos números reais.

A seguir, será realizada uma breve exposição de estratégias que podem ser realizadas para aproximar um número irracional por um número racional, através da ferramenta das Frações Contínuas.

As Frações Contínuas e as boas aproximações.

As frações contínuas surgiram pela primeira vez nos escritos do matemático indiano Aryabhata (séc. VI d.C.), para resolver equações lineares. Este tema ressurgiu na Europa do século XV d.C. Um dos primeiros passos para o desenvolvimento das frações contínuas, na era renascentista, foi dado por Pietro Antonio Cataldi (séc. XVI), de Bolonha, que escreveu algumas raízes quadradas nesta forma.

[BOYER-1991] relata um dos possíveis modos de se obter $\sqrt{2}$ e que recai numa equação de 2º grau, conforme iniciamos este artigo. Assim, podemos escrever $x+1=\sqrt{2}$ e elevamos ambos os membros ao quadrado. Obtemos $(x+1)^2=2$ e daí $x^2+2x=1$.

Colocando-se 'x' em evidência no 1 membro e isolando-se 'x' obtém-se: $x(x+2)=1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{x+2}$. Por recorrência, substituindo-se $x=\dfrac{1}{x+2}$ no 2º membro desta mesma expressão, e levando-se o processo ao infinito, podemos escrever:

$$x=\frac{1}{2+x}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

Como $x+1=\sqrt{2}$, ou ainda $\sqrt{2}=x+1=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$

O termo 'fração contínua' apareceu pela primeira vez em 1653 com John Wallis.

Uma fração contínua simples com a_0 inteiro e os demais termos $(a_i,\ i>0)$ naturais não nulos, é definida pela forma:

$$x=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots}}}}=[a_0;\, a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4, \cdots]$$

Os exemplos apresentados permitem caracterizar os números reais em duas classes disjuntas através do tema das Frações Contínuas. Uma fração contínua simples pode ter finitos ou infinitos termos. Se o número for racional, a fração contínua é finita. Caso o número for irracional, a fração contínua é infinita.

Esta caracterização pelas Frações Contínuas pode estabelecer elo de ligação entre o conjunto dos números racionais e números irracionais. É o tema das aproximações. A aproximação de números irracionais por racionais é uma questão de grande importância em diversas situações.

Podemos obter aproximações da fração contínua, dadas por c_0, c_1, c_2, c_3, e denominadas 1° convergente, 2° convergente, 3° convergente da fração contínua simples $[a_0;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ ....,\ a_n,\ ....]$, conforme o quadro 2.

$$c_0 = a_0; \qquad c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1]; \qquad c_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = [a_0; a_1, a_2]; \qquad c_3 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3].$$

Quadro 2: Os quatro primeiros convergentes de uma fração contínua simples.

No século XVI o físico holandês famoso matemático Christiaan Huygens utilizou as frações contínuas para a construção de instrumentos científicos. Huygens elaborou um modelo reduzido do sistema solar. Para a construção de um modelo mecânico necessitava das relações de transmissão entre as engrenagens que permitiam reproduzir as órbitas planetárias numa escala adequada.

Vamos re-editar o problema de determinar o modelo da órbita do planeta Saturno em relação ao Sol. Na época de Huygens, acreditava-se que o tempo necessário para o planeta Saturno orbitar o Sol era de 29,46 anos (atualmente este valor foi medido como sendo 29,43 anos). Para modelar este sistema faz-se uso de duas engrenagens, uma com uma 'x' dentes e a outra com 'y' dentes, de modo que $\dfrac{x}{y} = 29,43$.

Huygens elaborou algumas aproximações racionais para a razão 29,43, tendo obtido: $\dfrac{29}{1}$, $\dfrac{59}{2}$, $\dfrac{206}{7}$. Este último valor permitiu uma escolha de engrenagens com 7 dentes e com 206 dentes. Esta escolha está relacionada com aspectos práticos, pois é difícil usinar engrenagens com um número muito pequeno ou muito grande de dentes.

Para verificar os valores propostos por Huygens, utilizaremos o procedimento aritmético.

O 1º convergente é dado por $c_0 = a_0 = 29$. O 2º convergente é dado por $c_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$, ou ainda, $c_1 = 29 + 0,43 = 29 + \dfrac{1}{2,32558} \approx 29 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{59}{2} = 29,5$. Já o 3º comvergente:

$$c_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = 29 + \frac{1}{2,32558} = 29 + \frac{1}{2 + 0,32558} \approx 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = \frac{206}{7} \approx 29,43,$$

resultados iniciais que concordam com Huygens.

Se fossemos determinar o 4º convergente teríamos como resultado a fração $\frac{2737}{93}$, uma aproximação melhor que a anteriores, mas que resulta em números de dentes impraticáveis.

Diversas estratégias para se obter frações contínuas.

A situação anterior ilustra e fornece pista que as Frações Contínuas representam uma boa alternativa para a melhor aproximação de números racionais em situações práticas.

No ensino básico, a definição dos números irracionais como os números reais que não podem ser expressos por uma fração de números inteiros pode levar a simplificações e ao não entendimento pelo aluno do significado inerente aos irracionais.

Sabemos que a única via de acesso a um número irracional é a utilização de aproximações sucessivas através de números racionais. Na Matemática, este aspecto serve para caracterizar os números irracionais.

Para ilustrar tal aspecto, propomos a seguinte situação-problema:

Um fabricante de relógios precisa produzir dois tipos de rodas dentadas na razão $\sqrt{2}:1$, sendo impraticável que estas rodas tenham mais que 20 dentes. Encontre algumas possibilidades para os números de rodas que irão aproximar a razão desejada.

A Relação de transmissão, da coroa (engrenagem maior) para o pinhão (engrenagem menor), pode ser representada por $\frac{x}{y}=\sqrt{2}$, onde 'x' representa o número de dentes da coroa e 'y' representa o número de dentes do pinhão, sendo x, y inteiros positivos.

Para representar a raiz na forma de frações contínuas, o primeiro procedimento que faremos uso é o que denomino aritmético. Este consiste em escrever, seqüencialmente, os convergentes, até se obter uma fração que responda a questão, ou seja, que respeite a condição de contorno dada pelo limite de 20 dentes, para a engrenagem maior (coroa).

$c_0=\sqrt{2}\approx 1,4142136\approx 1$ (1º convergente)

$c_1=\sqrt{2}\approx 1,4142136=1+0,4142136=1+\frac{1}{2,4142136}\approx 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ (2º convergente)

$c_2=1+0,4142136=1+\frac{1}{2,4142136}=1+\frac{1}{2+0,4142136}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2,4142133}}\approx 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5}$ (3º convergente)

$c_3=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2,4142133}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+0,4142133}}\approx 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}\approx 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{5}{2}}}=1+\cfrac{1}{\frac{12}{5}}=\frac{17}{12}$ (4º convergente)

O 4º convergente revela que o nº de dentes da coroa seria 17 e o do pinhão 12, com aproximação dada por: $\frac{17}{12} = 1,4166667$, o que proporciona uma aproximação correta até a ordem das centenas, que para um par de engrenagens usuais é satisfatória.

Determinando-se o 5º e o 6º convergente, tem-se:

$$c_4 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,4142151}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0,4142151}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,4142046}}}} \approx \frac{41}{29}$$

$$c_5 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,4142046}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0,4142046}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,4142658}}}}} \approx \frac{99}{70}$$

Observa-se, nos seis primeiros convergentes, que existe uma repetição do algarismo 2. Será que tal conjectura é verdadeira? Para verificá-la, de modo mais geral, podemos escrever um segundo procedimento, de natureza algébrica. De $\sqrt{2} = 1,4142136 = 1 + \frac{1}{x_1}$, donde $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1}$. Ainda, de $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ que racionalizado resulta $x_1 = \sqrt{2} + 1$.

Daí, $x_1 = \sqrt{2} + 1$. Como $\sqrt{2} > 1$, então $x_1 = \sqrt{2} + 1 = 1 + 1 + \frac{1}{x_2} = 2 + \frac{1}{x_2}$. Assim: $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_2}}$. De $x_1 = \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = x_1$

Assim, por substituições sucessivas:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_3 + \cdots}}} = [1; 2; 2; 2; 2; \cdots] = [1; \overline{2}].$$

Este algoritmo exemplifica o fato que um número irracional tem representação infinita na forma de fração contínua, mas não existe correspondência inversa.

Um terceiro procedimento para expressar uma fração contínua é dado por Bombelli (séc XVI). Consiste na expressão:

$$x = \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}}$$

A demonstração de tal expressão é fornecida abaixo.

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b},$$

tem-se:

$$N = a^2 + b \Longrightarrow N - a^2 = b \Longrightarrow (\sqrt{N} - a) \cdot (\sqrt{N} + a) = b \Longrightarrow (\sqrt{N} - a) = \frac{b}{\sqrt{N} + a}$$

Mas:

$$\sqrt{N} - a = \frac{(\sqrt{N} - a) \cdot (\sqrt{N} + a)}{\sqrt{N} + a} = \frac{N - a^2}{\sqrt{N} + a} = \frac{b}{\sqrt{N} + a} = \frac{b}{2a + \sqrt{N} - a}$$

E aplicando-se sucessivamente o resultado acima:

$$\sqrt{N} - a = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \sqrt{N} - a}} = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}} \Longrightarrow \sqrt{N} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}}$$

Aplicando-se tal procedimento para a representação de $\sqrt{2}$ como fração contínua, tem-se:

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1} = 1 + \cfrac{1}{2 \cdot 1 + \cfrac{1}{2 \cdot 1 + \cfrac{1}{2 \cdot 1 + \cdots}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} = [1; 2, 2, 2, \cdots] = [1; \bar{2}]$$

Em 1572, Bombelli utilizou a seguinte aproximação para representar a raiz quadrada de 13. Considerando a = 3 e b = 4, de: $x = \sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 9}$, tem-se $\sqrt{13} = \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cdots}}}$

Em 1737, Euler escreve $\sqrt{13}$ como uma fração contínua. Para esse quinto procedimento, inicialmente consideremos, de modo geral, dado um irracional x, podemos escrevê-lo como:

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \text{ onde } 0 < \frac{1}{x_1} < 1$$

REMat
ISSN 2177-5095
nº3 - 2013
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

Também: $x_1 = a_1 + \dfrac{1}{x_2}$, onde $0 < \dfrac{1}{x_2} < 1$. Assim: $x = a_0 + \dfrac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cdots}}$.

Para o cálculo de $\sqrt{2}$ tem-se:

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 \Longrightarrow a_0 = 1 \ \text{ e } \frac{1}{x_1} = \sqrt{2} - 1. \text{Ainda:} \, x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1$$

Daí:

$$\sqrt{2}+1 = 2+(\sqrt{2}+1)-2 \Longrightarrow a_1 = 2 \text{ e } \frac{1}{x_2} = (\sqrt{2}+1)-2. \text{ Ainda:} \, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1 = x_1$$

Resulta:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} = [1; \bar{2}].$$

No caso particular de $\sqrt{13}$, que Euler propôs, pode-se escrever:

$$\sqrt{13} = 3 + \sqrt{13} - 3 \Longrightarrow a_0 = 3 \ \text{ e } \frac{1}{x_1} = \sqrt{13} - 3. \text{Ainda:} \, x_1 = \frac{1}{\sqrt{13}-3} \cdot \frac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}+3} = \frac{\sqrt{13}+3}{4}$$

Daí:

$$\frac{\sqrt{13}+3}{4} = 1+\left(\frac{\sqrt{13}+3}{4}\right)-1 \Longrightarrow a_1 = 1 \ \text{ e } \frac{1}{x_2} = \left(\frac{\sqrt{13}+3}{4}\right)-1 = \frac{\sqrt{13}-1}{4} \Longrightarrow x_2 = \frac{4}{\sqrt{13}-1}\cdot\frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{13}+1} = \frac{\sqrt{13}+1}{3}$$

$$\frac{\sqrt{13}+1}{3} = 1+\left(\frac{\sqrt{13}+1}{3}\right)-1 \Longrightarrow a_2 = 1 \ \text{ e } \frac{1}{x_3} = \left(\frac{\sqrt{13}+1}{3}\right)-1 = \frac{\sqrt{13}-2}{3} \Longrightarrow x_3 = \frac{3}{\sqrt{13}-2}\cdot\frac{\sqrt{13}+2}{\sqrt{13}+2} = \frac{\sqrt{13}+2}{3}$$

$$\frac{\sqrt{13}+2}{3} = 1+\left(\frac{\sqrt{13}+2}{3}\right)-1 \Longrightarrow a_3 = 1 \ \text{ e } \frac{1}{x_4} = \left(\frac{\sqrt{13}+2}{3}\right)-1 = \frac{\sqrt{13}-1}{3} \Longrightarrow x_4 = \frac{3}{\sqrt{13}-1}\cdot\frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{13}+1} = \frac{\sqrt{13}+1}{4}$$

$$\frac{\sqrt{13}+1}{4} = 1+\left(\frac{\sqrt{13}+1}{4}\right)-1 \Longrightarrow a_4 = 1 \ \text{ e } \frac{1}{x_5} = \left(\frac{\sqrt{13}+1}{4}\right)-1 = \frac{\sqrt{13}-3}{4} \Longrightarrow x_5 = \frac{4}{\sqrt{13}-1}\cdot\frac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}+3} = \sqrt{13}+3$$

$$\sqrt{13}+3 = 6+\left(\sqrt{13}+3\right)-6 \Longrightarrow a_5 = 6 \ \text{ e } \frac{1}{x_6} = \left(\sqrt{13}+3\right)-6 = \sqrt{13}-3 \Longrightarrow x_6 = \frac{1}{\sqrt{13}-3}\cdot\frac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}+3} = \frac{\sqrt{13}+3}{4} = x_1$$

Assim:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cdots}}}} = [3, 1111611116\cdots] = [3, \overline{11116}]$$

As frações contínuas e a Astronomia

Um ramo que utiliza muito das aproximações de números irracionais por racionais é a astronomia. Um problema interessante foi descrito no artigo de [Varella&Oliveira-2006] e apresentamos a seguir.

No final de agosto de 2003, tivemos a melhor ocasião para observar o planeta Marte de todo o século XXI. Marte esteve em oposição ao Sol em 28 de agosto e, no dia anterior, na sua menor distância à Terra dos últimos 60.000 anos! Seu brilho excepcional superou, nessa ocasião, o de todas as estrelas do céu noturno. Essa oposição repetiu, em condições muito mais favoráveis, a oposição de 23 de agosto de 1924, quando Marte esteve a 55,78 milhões de quilômetros da Terra.

Parafraseando [Varella&Oliveira-2006] , para entender o que significa oposição, na Astronomia, a figura 1 ilustra quatro possíveis posições entre o Sol, a Terra e Marte. As órbitas dos planetas foram aproximadas por uma circunferência e consideradas coplanares (a excentricidade da maioria dos planetas do Sistema Solar são próximas a 1,0, com exceção de Mercúrio e ao atualmente 'rebaixado' Plutão).

A figura revela que na oposição ocorre o alinhamento do Sol, da Terra e de Marte, nessa ordem, e, nessa ocasião, encontra-se em sua menor distância em relação à Terra.

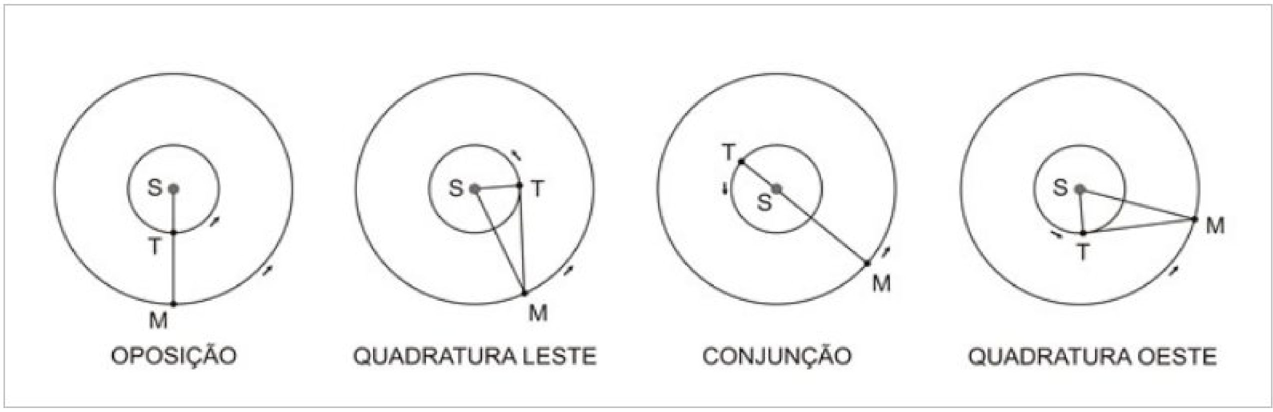

Figura 1: As quatro posições relativas canônicas dos planetas Terra e Marte [Varrela&Oliveira-2006] .

O período sideral (de translação) corresponde ao intervalo de tempo para um planeta retornar ao mesmo ponto de sua órbita. Para a Terra este valor é de $T_T = 365d\,6h\,09m\,10s$ ou aproximadamente 365,256363 dias) e para Marte é $T_M = 686,979852$ dias. Ao longo de seus movimentos ao redor do Sol, o intervalo de tempo entre duas oposições consecutivas de Marte é denominado período sinódico (S) e, em média, corresponde a aproximadamente $779,936096$ dias. O período sinódico, do grego synodikós, pode ser calculado pela expressão: $\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{M}$. Entretanto, observou-se que duas oposições consecutivas não ocorrem nos mesmos pontos de suas órbitas.

No caso de Marte e a Terra, as oposições ocorrem em 2 anos, 15 anos, 32 anos, 47 anos, dentre outras. Surge uma questão: Como determinar qual destas oposições o planeta Marte se encontra em sua menor distância em relação ao Sol, como a ocorrida em de 2003?

Considerando-se que o período sideral da Terra $T_T = 365,256363$ dias é o intervalo de tempo que a Terra retorna ao mesmo ponto de sua órbita e para Marte é $T_M = 779,936096$ dias, então, dado que ocorreu uma oposição, as próximas oposições nos mesmos pontos de suas órbitas ocorrerão num intervalo de tempo que seja um múltiplo comum de T_T e T_M . Assim, o problema consiste em determinar dois números inteiros m e n que satisfaçam a seguinte relação:

$$\begin{aligned} m \cdot S &= n \cdot T \longrightarrow m \cdot 779,936096 = n \cdot 365,256363 \\ \frac{n}{m} &= \frac{779,936096}{365,256363} = 2,135311146 \end{aligned}$$

Para obter estes inteiros m e n, faz-se uso do método das frações contínuas.

$c_0 = 2,135311146 = 2 + 0,135311146 = 2$ (1º convergente)

$c_1 = 2,135311146 = 2 + 0,135311146 = 2 + \frac{1}{7,390374182} \approx 2 + \frac{1}{7} = \frac{15}{7}$ (2º convergente)

$c_2 = 2,135311146 = 2 + \frac{1}{7,390374182} \approx 2 + \frac{1}{7+0,390374182} = 2 + \frac{1}{7+\frac{1}{0,561644814}} =$

$2 + \frac{1}{7+\frac{1}{2}} \approx \frac{32}{15}$ (3º convergente)

Assim, a fração contínua pode ser escrita por:

$$\frac{n}{m} = 2 + \frac{1}{7+\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{7+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}} = [2; 7, 2, 1, 1, 3, 1, \cdots]$$

Estes resultados podem ser sintetizados na tabela 1

Tabela 1: Diversas relações (reduzidas) entre as oposições Marte/Terra [Varrela&Oliveira-2006].

A	$\frac{n}{m}$	Valor	Diferença
1	$\frac{2}{1}$	2,000000000	-0,135311146
2	$\frac{15}{17}$	2,142857143	+0,007545997
3	$\frac{32}{15}$	2,133333333	-0,001977813
4	$\frac{47}{22}$	2,136363636	+0,001052490
5	$\frac{79}{37}$	2,135135135	-0,000176011
6	$\frac{284}{133}$	0,135338346	+0,000027200

Dentre as diversas aproximações, estão evidenciadas as periodicidades citadas antes, é razoável se considerar a aproximação: $\frac{S}{T} = \frac{n}{m} = \frac{79}{37}$.

Considerando-se que o calendário gregoriano não utiliza o período sideral (de translação) da Terra, mas o período do retorno das estações do ano, que tem o valor médio de $365,25$ dias para o ano, o período de setenta e nove anos corresponde a: $79 \times 365,25$ dias $=$ $28.854,75$ dias. Para os 37 períodos sinódicos de Marte tem-se: $37 \times 779,936096$ dias $=$ $28.857,63555$ dias, ocorre uma pequena diferença de cerca de $2,9$ dias do nosso calendário. Com estes dados pode-se prever a próxima oposição: agosto de 2082.

REMat
ISSN 2177-5095
nº3 - 2013
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

As Frações Contínuas e o Algoritmo de Euclides.

Historicamente, [ANDRADE&BRACCIALI-2005] ressaltam que, embora os gregos conhecessem o algoritmo de Euclides, não há evidências que eles o utilizassem para construir frações contínuas. Este indício não deixa de se constituir em um procedimento extremamente prático e engenhoso, que mais uma vez revela a importância de tal algoritmo, que geralmente não é abordado no ensino básico[1].

Um número racional tem representação finita em fração contínua. Sejam p e q números naturais. Euclides propõe o seguinte algoritmo (ver tabela 2).

Tabela 2: Os termos do processo da divisão

Divisão	Quociente	Resto
$p : q$	a_0	r_0
$q : r_0$	a_1	r_1
$r_0 : r_1$	a_2	r_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

A escrita correspondente a operação de divisão é dada na tabela 3:

Tabela 3: Algoritmo de Euclides

Divisão	Quociente	Resto
$p = a_0 \cdot q + r_0$	$(0 < r_0 < q)$	$\frac{p}{q} = a_0 \cdot \frac{q}{q} + \frac{r_0}{q} \longrightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q}$
$q = a_1 \cdot r_0 + r_1$	$(0 < r_1 < r_0)$	$\frac{q}{r_0} = a_1 \cdot \frac{r_0}{r_0} + \frac{r_1}{r_0} \longrightarrow \frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0}$
$r_0 = a_2 \cdot r_1 + r_2$	$(0 < r_2 < r_1)$	$\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}$
$r_1 = a_3 \cdot r_2 + r_3$	$(0 < r_3 < r_2)$	$\frac{r_1}{r_2} = a_3 + \frac{r_3}{r_2}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$r_{s-3} = a_{s-1} \cdot r_{s-2} + r_{s-1}$	$(0 < r_{s-1} < r_{s-2})$	$\frac{r_{s-3}}{r_{s-2}} = a_{s-1} + \frac{r_{s-1}}{r_{s-2}}$
$r_{s-2} = a_s \cdot r_{s-1}$		$\frac{r_{s-2}}{r_{s-1}} = a_s$

A tabela 3 mostra que cada fração imprópria (dada no 1º membro) é igual a soma de um coeficiente inteiro (a_i) e uma fração própria, esta última desenvolvida em cada etapa seguinte, na forma inversa.

[1] O Algoritmo de Euclides pode ser utilizado para se determinar o m.d.c. entre dois números inteiros, o m.d.c. entre dois polinômios e para se determinar as soluções de uma Equação Diofantina Linear, entre outras aplicações.

$$\frac{p}{q} = a_0 \cdot \frac{q}{q} + \frac{r_0}{q} \longrightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} \Longrightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{r_0}} \qquad \text{(2º convergente)}$$

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{r_0}} \Longrightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{r_1}{r_0}} \rightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_0}{r_1}}} \qquad \text{(3º convergente)}$$

$$\frac{p}{q} = a_{0+}\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_0}{r_1}}} \longrightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_{2+}\cfrac{r_2}{r_1}}} \longrightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}}} \qquad \text{(4º convergente)}$$

Assim, $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$.

As Frações Contínuas e o Calendário Gregoriano: Uma incrível coincidência!

"Lamentavelmente, o ano não é igual a um número inteiro de dias" [BESKIN-1987, p.17]. Esta citação, com relação a um velho manual de cosmografia, ilustra um interessante problema matemático, ligado as frações contínuas.

O ano trópico, aquele que marca as estações, tem a duração média de 365 dias 5 horas 48 minutos e 46 segundos = $365,242199$ dias. O calendário juliano, estabelecido em 45 a. C., considera a aproximação 1 ano = 365 dias 6 horas = $365,25$ dias, ou seja, tinha uma diferença de cerca de 11 minutos. Esta diferença de 11 minutos, em cem anos, causava um desvio de:

$$\left.\begin{array}{ccc} 11min\,14s & \longrightarrow & 1\,ano \\ x & \longrightarrow & 100\,anos \end{array}\right\} \longrightarrow x = 67400s = 1123,3333min = 1123min\,20s = 18h\,43min\,20s$$

Esta aproximação causou um problema: as estações reais haviam retrocedido treze dias em relação ao calendário Juliano. Em 1582, o papa Gregório III convocou sábios para resolver este problema. Desde 45 a.C. até 1582, se passaram 1627 anos. O desvio acumulado desde então era de:

$$\left.\begin{array}{ccc} 18h43min\,20s & \longrightarrow & 100\,anos \\ x & \longrightarrow & 1627\,anos \end{array}\right\} \longrightarrow x = 1096598s = 18276min\,38s = 304h\,36min\,38s = 12dias\,16h\,36min\,38s$$

Para tal, principiou-se em se calcular o desvio proporcionado para um dia. Se em 1 ano o desvio é de 11 min 14s (674 s), então 1 dia = 24 h = 1440 min = 86400 s proporciona um desvio dado por: 86400 s: 674 s =128,19 anos. Assim, ocorre aproximadamente desvio de 128 anos para cada dia, ou seja, de cerca de 3 dias em cada 400 anos.

Esta aproximação provocou uma pequena alteração na intercalação de três anos de 365 e um ano de 366 dias, que já era própria do calendário juliano. A retirada dos três dias seguiu a regra usual: os anos múltiplos de 100 deixariam de ser bissextos, exceto pelos múltiplos de 400.

Enquanto a duração média do ano Juliano era de 365 dias 6h, com a retirada de três dias do calendário gregoriano, o valor passou a ser $365\frac{97}{400}dias = 365,242500dias = 365dias\,5horas\,49min\,12s$. O que ainda causa uma diferença de cerca de 26 segundos do valor real.

A duração média de 1 ano = 365 dias 5 horas 48 min 46 s = 365, 242199 dias.

A fração $\dfrac{5h\,48min\,46s}{1\,dia} = \dfrac{20926}{86400} = \dfrac{10463}{43200}$

a_i	4	7	1	3	5	64
43200	10463	1348	1027	321	64	1
1348	1027	321	64	1	0	

A fração contínua correspondente a $1ano = 365dias\,5horas\,48min\,46s = [365; 4, 7, 1, 3, 5, 64]$. O 1º convergente é 365 dias. O 2º convergente é dado por: $365\frac{1}{4}$dias, própria do calendário Juliano.

O 3º convergente é dado por: $365\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}} = 365\frac{7}{29}dias$, ou seja, 7 anos bissextos a cada 29 anos.

O 4º convergente é dado por: $365\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1}}} = 365\frac{8}{33}dias$, ou seja, 8 anos bissextos a cada 33 anos.

O 5º convergente é dado por: $365\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}} = 365\frac{31}{128}dias$, 21 anos bissextos a cada 128 anos.

$$\left.\begin{array}{lcl} 31\,\text{anos bissextos} & \longrightarrow & 128\,\text{anos do calendário} \\ x & \longrightarrow & 400\,\text{anos do calendário} \end{array}\right\} \longrightarrow x = 96,875 \approx 97\,\text{anos bissextos}$$

Segundo Beskin (1987), isto é uma incrível coincidência, pois não há indícios do uso de frações contínuas nos procedimentos de correção do calendário gregoriano.

Considerações finais

As considerações tecidas neste texto revelam possibilidades de abordagem das Frações Contínuas Simples no Ensino Básico, considerando-a como uma oportunidade de atualização do currículo de Matemática.

Ainda, este tópico possibilita a articulação entre os conjuntos dos Números Racionais e o conjunto dos Números Irracionais. A própria natureza do tema permite esclarecer e ampliar o próprio conceito de fração, assim como promover um maior entendimento envolvendo a natureza dos números irracionais, numa abordagem que revela a dicotomia e elegante interação entre a natureza discreta e finita, em contrapartida da natureza contínua e infinita dos números reais.

Aliam-se a estas considerações a oportunidade propiciada pela introdução de um tema que articula diversos conceitos matemáticos, ampliando-se a relação constituída internamente a matemática, permitindo a construção de uma rede de significados, conforme [MACHADO-1995].

Em relação às contribuições de ordem didática, ao se realizarem aproximações das raízes não-exatas, que representam números irracionais, o recurso à introdução das frações contínuas como tema mediador possibilita a exploração de diversas estratégias de abordagem na resolução de problemas envolvendo frações contínuas. Deste modo, tal procedimento permite a exploração da abordagem aritmética e a articulação com o uso da estratégia algébrica, favorecendo o desenvolvimento das competências pessoais dos alunos.

Referências

[ANDRADE&BRACCIALI-2005] ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F. **Frações Contínuas:** Propriedades e Aplicações. São Carlos, SMABC; São Paulo: Editora Plêiade, 2005. v. 20.

[BESKIN-1987] BESKIN, N. M. **Frações Contínuas.** Tradução de: Pedro Lima. Editora Mir, Moscou, 1987.103 p.

[BOYER-1991] BOYER, C. B. **História da Matemática.** 9. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1991. 488p.

[BROLEZZI-1996] BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática**. Tese de doutorado. São Paulo, Faculdade de Educação da USP, 1996.

[CHIQUETTO-1996] CHIQUETTO, M. **Breve História da Medida do Tempo.** São Paulo: Scipione, 1996.

[CUNHA-2007] CUNHA, M. O. **Sobre a idéia de algoritmo.** São Paulo: SEMA/USP, 2007. Disponível em: <www.educarede.org.br/.../2007-06-01-Sobre_o_conceito_de_algoritmo.doc >.

[ECHEVERRÍA&POZO-1998] ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. **Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender.** In: POZO, J. I. (org). A Solução de problemas: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998. Cap. 1. p. 13-42. ISBN 85-7307-356-X

[MACHADO-2001] MACHADO, N. J. **A Universidade e a organização do conhecimento:** a rede, o tácito, a dádiva. São Paulo: Estudos Avançados, v. 15, n. 42, p. 1-14, 2001. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php >. Acesso em: 20 Aug. 2006.

[MACHADO-1995] __________. **Epistemologia e Didática:** As Concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Editora Cortez, 1995.

[MACHADO-1990] __________. **Matemática e Língua Materna:** Análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Editora Cortez, 1990.

[SANTALÓ-1996] SANTALÓ, L. **Matemática para não-matemáticos.** In: PARRA, C.; SAIZ, I. Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. Tradução de: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996. Cap. 1. p. 11-24.

[SÃO PAULO-2008] SÃO PAULO. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo:** Matemática/ Ensino Fundamental (ciclo II) e Médio. São Paulo: SEE, 2008.