REMat
ISSN 2177-5095
nº3 - 2013
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

Há diferença entre os gráficos da família de funções $y = \dfrac{1}{x^n}$?

Rogério César dos Santos
Professor da UNB-FUP.
professorrogeriocesar@gmail.com

Resumo

A hipérbole $y = \frac{1}{x}$ e as funções $y = \frac{1}{x^n}$, $n > 0$, possuem várias semelhanças: são funções decrescentes, seus gráficos têm a concavidade para cima, não possuem pontos críticos e apresentam as mesmas assíntotas. Além disso, possuem área infinita sob seus gráficos no intervalo $(0, \infty)$. No entanto, existe uma diferença nas áreas dos retângulos determinados por elas, como será mostrado neste artigo.

Palavras-chaves: Funções, Área sob curvas, Construção de gráficos.

Is there a difference among the graphics of the family of functions $y = \dfrac{1}{x^n}$?

Abstract

The hyperbola $y = \frac{1}{x}$ and the functions $y = \frac{1}{x^n}$, $n > 0$, have several similarities: they are decrescent functions, their graphics have concavity up, doesn't have critic points and have the same asymptotes. Besides, have infinite area under their graphics on the interval $(0, \infty)$. However, there is a difference on the areas of the triangles determined by them, as we shall see in this article.
Keywords: Functions, area under curves, graphics construction.

1 Introdução

Quando estudamos Cálculo Diferencial, por exemplo em [HOFFMANN-2002], aprendemos a construir os gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f(x) = \frac{1}{x^{1/3}}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$,

REMat
ISSN 2177-5095
nº3 - 2013
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

$f(x) = \dfrac{1}{x^{\pi}}$, enfim, $f(x) = \dfrac{1}{x^{n}}$ para $n \in \mathbb{R}^{*}_{-}$e $x > 0$. Percebemos que todos eles possuem o mesmo aspecto, o mesmo visual. Neste artigo veremos que, apesar da semelhança gráfica entre as funções, há uma diferença fundamental nos retângulos determinados abaixo deles.

2 Semelhanças

Primeiro, vamos às semelhanças. Em todos estes gráficos, verifica-se que não há pontos críticos, pois, dada a função $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, com $n > 0$ e $x > 0$, a equação $f'(x) = \dfrac{-n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = \dfrac{-n}{x^{n+1}} = 0$ não tem solução x_0. Logo, não há máximos nem mínimos. Observe também que esta derivada é negativa, o que nos diz que a função é decrescente em todo o domínio $x > 0$. Atentamos também para o fato de que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ (assíntota vertical), e que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$(assíntota horizontal). Além disso, verifica-se que a concavidade do gráfico é sempre para cima, já que $f''(x) = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot x^n}{x^{2n+2}} = \dfrac{n \cdot (n+1)}{x^{n+2}} > 0$ sempre que $x > 0$. Juntando estas informações, podemos esboçar o gráfico, veja três exemplos na figura 1:

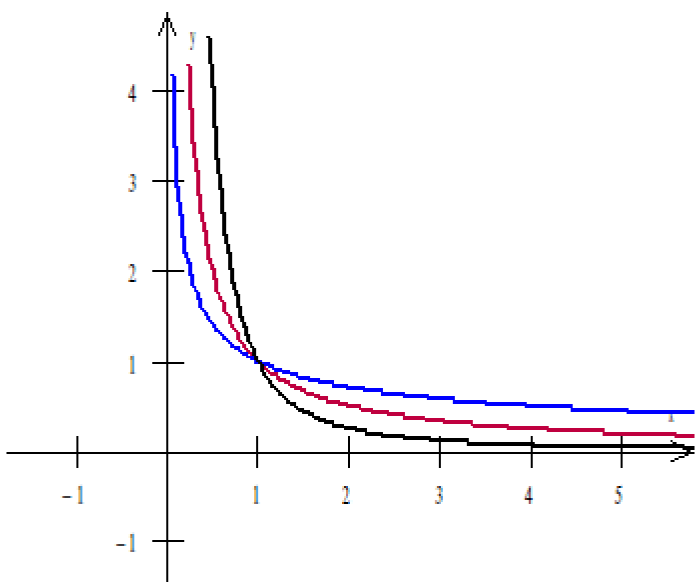

Figura 1: Os gráficos das funções $y = \dfrac{1}{x}$, $(n = 1)$ em vermelho, $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $(0 < n < 1)$ em azul e $y = \dfrac{1}{x^2}$, $(n > 1)$ em preto, todos para $x > 0$.

REMat
ISSN 2177-5095
nº3 - 2013
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

Outra semelhança é o fato de a área sob os três tipos de gráficos ser infinita, veja: Para n = 1, tome a um número qualquer positivo. Então,

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}dx = \int_0^a \frac{1}{x}dx + \int_a^\infty \frac{1}{x}dx =$$
$$\left[\ln a - \lim_{t\to 0+} \ln t\right] + \left[\lim_{t\to\infty} \ln t - \ln a\right] =$$
$$\ln a + \infty + \infty - \ln a = \infty$$

Para $0 < n < 1$, temos que $-n+1 > 0$, de sorte que $m = 1-n > 0$. Daí,

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^n}dx = \lim_{t\to\infty} \frac{t^m}{(-n+1)} - \frac{0^m}{(-n+1)} = \infty - 0 = \infty$$

Para $n > 1$, temos que $-n+1 < 0$, de sorte que $m = n-1 > 0$. Daí,

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^n}dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^m\cdot(-n+1)} - \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^m\cdot(-n+1)} = 0 - (-\infty) = \infty$$

3 Diferenças

Agora, vamos às diferenças entre os três tipos de gráficos. Elas residem nos retângulos determinados sob os gráficos.

3.1 O caso $n = 1$

Vamos inicialmente tratar do gráfico da função $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$, ou seja, quando $n = 1$. Fixe x maior do que zero, e considere o retângulo de base x e altura $f(x)$ com vértice inferior esquerdo na origem $(0,0)$. Então, o vértice superior direito pertence ao gráfico. A área de todo e qualquer retângulo assim construído é igual a $x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$.

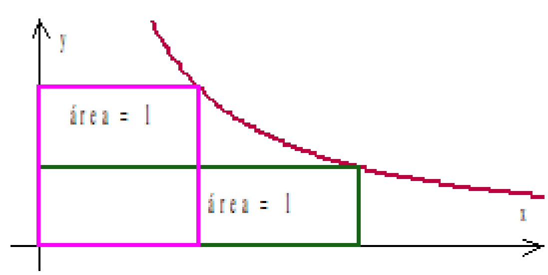

Figura 2: Dois retângulos determinados pelo gráfico da função $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$, ambos com área igual a 1

3.2 O caso $n > 1$

Vejamos o que acontece em seguida com os retângulos determinados abaixo do gráfico da função $y = \frac{1}{x^n}$, para $n > 1$. Considere o retângulo construído da mesma forma, de modo que sua área vale $a(x) = x \cdot \frac{1}{x^n} = x^{1-n} = \frac{1}{x^m}$, com $m = n - 1 > 0$. Observe, neste caso, que as áreas dos retângulos não têm o mesmo valor, se mudarmos x. Como $m > 0$, temos $\lim_{x \to 0+} a(x) = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} a(x) = 0$. Além do mais, $a'(x) = (1 - n) \cdot x^{-n} < 0$, o que mostra que a área é função decrescente de x. Veja a figura 3.

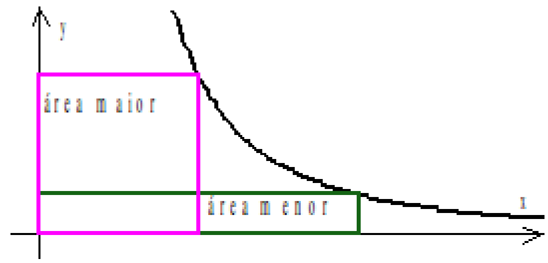

Figura 3: À medida em que x aumenta, a área do retângulo diminui para zero; e à medida que x diminui, a área aumenta para infinito

3.3 O caso $n < 1$

No caso em que $n < 1$, porém, as coisas se invertem. Seja a função $y = \frac{1}{x^n}$, para $0 < n < 1$. Considere o retângulo construído da mesma forma, de modo que sua área vale $a(x) = x \cdot \frac{1}{x^n} = x^{1-n} = x^m$, com $m = 1 - n > 0$. Como $m > 0$, temos: $\lim_{x \to 0+} a(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} a(x) = \infty$. Além do mais, $a'(x) = (1 - n) \cdot x^{-n} > 0$, o que mostra que a área é função crescente de x. Veja a figura 4.

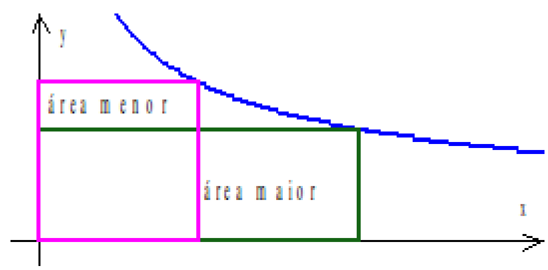

Figura 4: À medida em que x aumenta, a área do retângulo aumenta para infinito; e à medida que x diminui, a área diminui para zero

4 Conclusão

Apesar de as três áreas sob os três tipos de gráficos serem infinitas, e os gráficos possuírem o mesmo aspecto, os retângulos abaixo dos gráficos possuem comportamentos distintos, ora tendo áreas constantes, ora áreas crescentes e ora áreas decrescentes.

Referências

[HOFFMANN-2002] HOFFMANN, L. D. **Cálculo:** Um curso Moderno e suas Aplicações. 7a edição. LTC, São Paulo, 2002