REMat
ISSN 2177-5095
nº2 - 2010
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

Quantas equações existem?

Rogério César dos Santos
Professor da UnB - FUP
professorrogeriocesar@gmail.com

Resumo

O trabalho consiste em definir a altura de uma equação polinomial com coeficientes inteiros, e depois em calcular quantas equações existem com determinado grau e altura pré-fixados. Em seguida, utilizaremos este resultado para mostrar que o conjunto destas equações é enumerável. O trabalho consiste num ótimo exercício de Análise Combinatória.

Palavras chaves: Enumerabilidade, Altura de uma Equação, Análise Combinatória.

How many equations do exist?

Abstract

In this work we define the high of a polinomial equation with integers coefficients and then calculate how many equations do exist in a given degree and height. After, we use this result to show that the set of this equations is enumerable.
Keywords: Enumerability, height of an equation, combinatorial analysis.

1 Introdução

A *altura* de uma equação polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ com coeficientes a_i inteiros é definida como a soma dos módulos de seus coeficientes. Nossa proposta é contar o número de equações que possuem uma determinada altura h, o que consiste numa boa aplicação da análise combinatória. Ao fazermos tal contagem, seremos capazes também de provar que o conjunto E de todas as equações polinomiais com coeficientes inteiros é enumerável, isto é, que existe uma função bijetora de domínio $N = \{1, 2, \cdots\}$ e imagem E.

Para tanto, vamos assumir o seguinte teorema, clássico da Análise Real, retirado de (FIGUEIREDO-1996):

Teorema 1. *Se $\{X_1, X_2, \cdots\}$ é um conjunto enumerável, onde cada X_i é um conjunto finito, então a união dos X_i's é um conjunto enumerável.*

Um elemento típico em E será denotado por $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$, $n > 0$. Assim, as equações $x^2 - 2 = 0$ e $x^8 + 4x^6 - 13x = 0$, de graus 2 e 8 respectivamente, são elementos de E. Vamos considerar que as equações de mesmo grau, mas que diferem em seus coeficientes, são distintas, mesmo que tenham as mesmas raízes. Por exemplo, $2x^2 - 4 = 0 \neq x^2 - 2 = 0$. Segue abaixo a definição da *altura* de uma equação.

Definição 2. Fixada uma equação de grau n, definimos a sua altura h como sendo $h = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$. Observe que, como o grau da equação é n, segue que $a_n \neq 0$, portanto, $h > 0$.

2 Cálculo da altura h para o caso h maior do que o grau da equação

Lema 3. *Dados $s \in \{0, 1, \cdots\}$ e h tal que $h - (s+1) \geq 0$, então a quantidade de $(s+1)$-uplas $(t_n \geq 0,\ t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0,\ \cdots, t_s \geq 0)$, soluções inteiras e não negativas da equação $t_n + t_1 + t_2 + \cdots + t_{s-1} + t_s = h - (s+1)$, é $\binom{h-1}{s}$(combinação de $h-1$ elementos tomados s a s).*

Demonstração.

1º caso: $h - (s+1) = 0$. Temos: $h-1 = s$ e, portanto, $\binom{h-1}{s} = 1$. Por outro lado, é fácil ver que a única solução da equação nesse caso é a $(s+1)$-upla $(0, 0, ..., 0)$.

2º caso: $h - (s+1) > 0$. Temos: $h > s + 1 \geq 0 + 1 = 1 \Rightarrow h - 1 > 0$. Trata-se de um problema clássico de análise combinatória (veja o o exercício C.1 do cap 26 em (PAIVA-1995)): se dispusermos $h - (s+1)$ barras " | " e s símbolos de " + " em fila, o problema se resume em determinarmos de quantas formas podemos permutar todos estes $h - 1 > 0$ objetos. Essa quantidade corresponde ao número de permutações de $h-1$ elementos, dos quais $h - (s+1)$ se repetem, e s se repetem:

$$P_{h-1}^{(h-(s+1),s)} = \frac{(h-1)!}{(h-(s+1))! \cdot s!} = \frac{(h-1)!}{((h-1)-s))! \cdot s!} = \binom{h-1}{s}$$

□

Corolário 4. *Dados $s \in \{0, 1, \cdots\}$ e h tal que $h-(s+1) \geq 0$, a quantidade de $(s+1)$-uplas $(z_n > 0,\ z_1 > 0, \cdots, z_s > 0)$, soluções positivas da equação $z_n + z_1 + z_2 + \cdots + z_s = h$, é*

$$\binom{h-1}{s}.$$

Demonstração. Tomando $t_n = z_n - 1,\ t_1 = z_1 - 1,\ \cdots,\ t_s = z_s - 1$, estamos nas hipóteses do lema 3, ou seja, $t_n \geq 0,\ t_1 \geq 0,\ \cdots,\ t_s \geq 0$ e $t_n + \sum_{i=1}^{s} t_i = h - (s+1)$, e o resultado segue imediatamente do lema 3. □

Corolário 5. *Sejam $h > n > 0$, e considere o conjunto $\{0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_s < n\}$ formado por números inteiros. A quantidade M de equações de grau n, altura h, e tendo os $s+1$ coeficientes de x^n, x^{k_s}, $x^{k_{s-1}}, \cdots$, x^{k_1} não-nulos e os demais nulos é $M = \binom{h-1}{s} \cdot 2^{s+1}$.*

Demonstração. A questão consiste em encontrar quantas $(s+1)$-uplas $(a_n \neq 0, a_{k_s} \neq 0, \cdots, a_{k_1} \neq 0)$ resolvem a equação

$$|a_n| + \sum_{i=1}^{s} |a_{k_i}| = h.$$

Tomando $|a_n| = z_n,\ |a_{k_1}| = z_1,\ \cdots,\ |a_{k_s}| = z_s$, estamos na hipótese do colorário 4 (observe que, como $h > n > s \geq 0$, então $h > s$, e assim $h \geq s+1$). Como os $s+1$ coeficientes $a_n, a_{k_1}, ..., a_{k_s}$ estão em módulo, o sinal de cada um deles não modifica a altura h. E como podemos variar o sinal de cada uma das $(s+1)$-uplas $(z_n,\ z_1,\ \cdots,\ z_s)$ obtidas no corolário 4 de 2^{s+1} maneiras, temos que $M = 2^{s+1} \cdot \binom{h-1}{s}$. □

Corolário 6. *Fixados $h > n > 0$, a quantidade de equações de grau n, altura h e possuindo exatamente $s+1$ coeficientes não nulos é $\binom{h-1}{s} \cdot \binom{n}{s} \cdot 2^{s+1}$.*

Demonstração. Nas equações que satisfazem as hipóteses, a_n já é diferente de zero. Assim, a questão consiste em pegar s coeficientes não nulos do conjunto $A = \{a_0,\ \cdots,\ a_{n-1}\}$ para então realizarmos a mesma contagem realizada no colorário 5. De quantas formas podemos pegar s coeficientes em A? Combinação de n elementos tomados s a s: $\binom{n}{s}$. Assim, o número de equações com $s+1$ coeficientes não nulos é $\binom{h-1}{s} \cdot \binom{n}{s} \cdot 2^{s+1}$. □

O corolário a seguir dá, finalmente, o número de equações com determinada altura h e grau n, no caso em que $h > n$.

Corolário 7. *O número de equações em E com um dado grau $n > 0$ e uma dada altura $h > n > 0$ é*

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{h-1}{s} \cdot \binom{n}{s} \cdot 2^{s+1}$$

Demonstração. Como $h > n > 0$, o valor s (número total de coeficientes não nulos menos 1) do colorário 6 pode assumir desde o valor 0 até o valor n, veja os exemplos: na equação $(n+1)\cdot x^n = 0$, $h = n+1 > n$ e $s = 0$, enquanto que na equação $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0$, h também vale $n+1 > n$ e $s = n$. Basta, portanto, somarmos as quantidades de equações consideradas no colorário 6 para cada$s = 0, 1, \cdots, n$. □

3 Cálculo da altura h para o caso h menor ou igual do que o grau da equação

Corolário 8. *O número de equações em E com um dado grau $n > 0$ e uma dada altura $0 < h < n+1$ é*

$$\sum_{s=0}^{h-1} \binom{h-1}{s} \cdot \binom{n}{s} \cdot 2^{s+1}$$

Demonstração. Suponha que a equação $a_n x^n + a_{k_1} x^{k_1} + \cdots + a_{k_s} x^{k_s} = 0$, $a_n \neq 0$, $a_{k_1} \neq 0, \cdots, a_{k_s} \neq 0$ tenha altura $h < n+1$. Portanto $s+1 \leq |a_{k_1}| + |a_{k_2}| + \cdots + |a_{k_s}| + |a_n| = h \leq n$, isto é, a quantidade $s+1$ de coeficientes não-nulos poderá ser, no máximo, h. Logo, ao invés de s variar de 0 até n como no colorário 7, s deve variar de 0 até $h-1$. Observe que, nas demonstrações dos corolários 5 e 6, foi usado essencialmente que h > s □

4 Conclusão

Resumindo as conclusões dos corolários 7 e 8, temos: fixados $n > 0$ e $h > 0$, o número $N_{n,h}$ de equações polinomiais com coeficientes inteiros, grau n e altura h é:

$$N_{n,h} = \begin{cases} \sum_{s=0}^{h-1} \binom{h-1}{s} \cdot \binom{n}{s} \cdot 2^{s+1} & , se\ h \leq n \\ \sum_{s=0}^{n} \binom{h-1}{s} \cdot \binom{n}{s} \cdot 2^{s+1} & , se\ h > n \end{cases}$$

Seguem alguns exemplos (o cálculo de $N_{n,h}$ e a última tabela ficam a cargo do leitor):

$n=1,\ h=1 \Rightarrow N_{1,1}=2$	$n=1,\ h=2 \Rightarrow N_{1,2}=6$	$n=1,\ h=3 \Rightarrow N_{1,3}=10$
$x=0$ $-x=0$	$x+1=0,\ -x+1=0,\ x-1=0,$ $-x-1=0,\ 2x=0,\ -2x=0$	$3x=0,\ -3x=0,\ 2x+1=0$ $-2x+1=0,\ 2x-1=0$ $-2x-1=0,\ x+2=0$ $-x+2=0,\ x-2=0$ $-x-2=0$

REMat
ISSN 2177-5095
nº2 - 2010
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

$n=2,\ h=1 \Rightarrow N_{2,1}=2$	$n=2,\ h=2 \Rightarrow N_{2,2}=10$	$n=2,\ h=3 \Rightarrow N_{2,3}=26$
$x^2=0,\ -x^2=0$	$2x^2=0,\ -2x^2=0,\ x^2+x=0,$ $-x^2+x=0,\ x^2-x=0,$ $-x^2-x=0,\ x^2-1=0$ $-x^2+1=0,\ x^2-1=0$ $-x^2-1=0$	$\pm 3x^2=0$, (2 equações) $\pm 2x^2 \pm 1=0$, (4 equações) $\pm 2x^2 \pm x=0$, (4 equações) $\pm x^2 \pm 2x \pm 1=0$, (8 equações) $\pm x^2 \pm x \pm 2=0$, (8 equações)

$n=3,\ h=1 \Rightarrow N_{3,1}=2$	$n=3,\ h=2 \Rightarrow N_{3,2}=14$	$n=3,\ h=3 \Rightarrow N_{3,3}=50$

Agora, denote por $C_{n,h}$ o conjunto das equações de grau pré-fixado n e altura pré-fixada h, e C o conjunto de todos os conjuntos $C_{n,h}$, $n=1,2,\cdots$ e $h=1,2,\cdots$ Podemos enumerar C seguindo as setinhas abaixo, começando por $C_{1,1}$:

$$\begin{tikzcd}
C_{1,1} \arrow[r] & C_{1,2} \arrow[dl] & C_{1,3} \arrow[r] & C_{1,4} \arrow[dl] & \cdots \\
C_{2,1} \arrow[d] & C_{2,2} \arrow[ur] & C_{2,3} \arrow[dl] & C_{2,4} & \cdots \\
C_{3,1} \arrow[ur] & C_{3,2} \arrow[dl] & C_{3,3} & \cdots & \\
C_{4,1} \arrow[d] & C_{4,2} & \cdots & & \\
\cdots & & & &
\end{tikzcd}$$

Concluiremos agora a demonstração de que E é enumerável: cada conjunto $C_{n,h}$ possui uma quantidade finita $N_{n,h}$ de elementos, e $E = \displaystyle\bigcup_{\substack{n=1,2,\cdots \\ h=1,2,\cdots}} C_{n,h}$. Logo, pelo teorema 1, está provado que E é enumerável.

Referências

[FIGUEIREDO-1996] FIGUEIREDO, D. G. **Análise I.** 2ª edição. LTC, Rio de Janeiro,1996

[PAIVA-1995] PAIVA, M. **Matemática 2.** 1ª Edição. Editora Moderna, São Paulo, 1995