REMat
ISSN 2177-5095
nº2 - 2010
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

O NÚMERO "PI"

Sandro Marcos Guzzo
Professor da UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus de Cascavel.
smguzzo@hotmail.com

Resumo

O número π sempre ocupou papel central na história da matemática, deste os primórdios da geometria, onde imaginava-se que este número fosse um número racional, até a atualidade onde computadores calculam exaustivamente suas casas decimais. Neste texto, apresentamos algumas expressões que podem ser usadas para calcular tantas casas decimais deste número, quantas forem desejadas (ou conseguidas). Em particular, exploramos as fórmulas envolvendo séries de potências da função arco tangente.

Palavras chaves: Número π. Fórmulas para π. Séries de potências para π.

THE NUMBER "PI"

Abstract

The number π has always occupied a central role in the history of mathematics, since the beginnings of geometry, where was thought to be a rational number, until today where computers hardly calculate its decimal places. In this paper, we present some expressions which can be used to calculate as many decimal places for this number, as desired (or achieved). In particular, we explore the formulas derived from power series of the arc tangent function.

Keywords: Number π. Formulas for π. Power series for π.

O número π

O número "pi", ficou conhecido da humanidade ainda antes de Cristo. É difícil dizer com precisão quando foi concebido, mas desde muito cedo, o homem percebeu que dividindo o comprimento de uma circunferência qualquer pelo seu diâmetro, resultava sempre um mesmo valor. A primeira menção deste fato é feita por volta do ano 2000 a.C. Isto é o que revela o papiro Rhind, um documento egípcio descoberto em 1855.

O símbolo atual que designa o número "pi" é a letra grega π, que foi utilizada pela primeira vez em 1707 por Willian Jones, mas só foi amplamente aceita quando usada por Euler em 1737. Fato este que não nos impedirá de usar a notação atual π, mesmo para citações mais antigas.

Um dos grandes problemas da antiguidade era a chamada quadratura do círculo. Este problema consiste em construir (apenas com régua e compasso) um quadrado de área igual à área de um círculo dado. As inscrições contidas no papiro Rhind indicam a regra um-nono: Se d é o diâmetro de um círculo, então subtraindo-se de d, um-nono de d, obtemos o lado do quadrado desejado. Isto significa que

$$\pi \left(\tfrac{d}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{8d}{9}\right)^2,$$

o que nos leva a

$$\pi = \left(\tfrac{16}{9}\right)^2 \approx 3,1605.$$

O primeiro matemático a investigar o número π foi Arquimedes (287-212 a.C.). Arquimedes construiu polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência e calculou o perímetro destes polígonos, obtendo limites superior e inferior para π. Em verdade o método de Arquimedes parte de um polígono regular de 6 lados e com argumentos algébricos dobra-se o número de lados a cada iteração. Usando polígonos regulares de $96 = 6 \cdot 2^4$ lados, Arquimedes calculou que

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70},$$

ou seja, $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. A fração $\frac{22}{7}$ é uma das mais famosas aproximações para π. Entretanto, um artifício do cálculo diferencial e integral nos mostra que $\pi \neq \frac{22}{7}$. Mais precisamente,

$$0 < \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx = \frac{22}{7} - \pi$$

Em 1761 o alemão Johann Lambert, usando frações continuadas, provou que π é um número irracional. Legendre, sem conhecer o trabalho de Lambert, chegou à mesma conclusão em 1794. Isto significa que este número, assim como todos os números irracionais, não pode ser representado por uma fração de números inteiros. Em outras palavras, o númeroπ tem infinitas casas decimais que não apresentam comportamento periódico. Uma prova de que π é irracional pode ser encontrada em (FIGUEIREDO-2002).

Devido a este fato, vários matemáticos ficaram ocupados durante algum tempo para calcular o valor de π com mais precisão do que se conhecia, isto é, com mais casas decimais. A cada nova tentativa os cálculos se tornavam mais elaborados e extensos.

Depois da construção do primeiro computador, o ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer), o trabalho de calcular π coloca computadores para trabalhar durante horas ou até dias para calcular mais casas decimais de π. O próprio ENIAC foi usado por Reitwiersner, em 1949 para calcular 2037 casas decimais corretas para π, trabalhando durante 70 horas. Em abril de 2009, Daisuke Takahashi e sua equipe do Centro de Ciências Computacionais da Universidade de Tsukuba, calcularam 2,57 trilhões de casas decimais, usando o supercomputador T2K-Tsukuba System, com 640 processadores em paralelo, que trabalhou por 73 horas e 36 minutos (incluindo a verificação), à velocidade de 95Tflop/s (95 trilhões de operações por segundo).

O nosso objetivo aqui, é apresentar uma maneira de se calcular o número π com a precisão que se desejar (ou conseguir). Para iniciarmos, faremos uma rápida apresentação de séries geométricas e séries alternadas. É recomendado ao leitor alguma habilidade sobre sequências e séries.

Definição 1. Dada uma sequência geométrica infinita $\{ar^n\}_{n\geq 0}$, a soma dos termos desta sequência é chamada de série geométrica. É uma expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + a\cdot r + a\cdot r^2 + a\cdot r^3 + \cdots + a\cdot r^n + \cdots .$$

Quando esta soma infinita resultar em um valor finito S, então a série é dita convergente para S, e caso contrário, a série é dita divergente.

Teorema 2. *Uma série geométrica, $\sum ar^n$, é convergente, se e somente se, $|r| < 1$. No caso de convergir, o valor desta soma é precisamente o número $S = \frac{a}{1-r}$.*

Definição 3. Se $\{a_n\}_{n\geq 0}$ é uma sequência infinita de termos positivos, então uma série alternada é uma soma da forma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

Teorema 4. *Uma série alternada $\sum(-1)^n a_n$ é convergente se os termos a_n formam uma sequência positiva, decrescente, e que tende a zero.*

O leitor interessado nas demonstrações dos dois últimos teoremas, ou em alguns exemplos de séries alternadas e geométricas, pode consultar (LEITHOLD-1994).

Neste ponto temos condições de construir a série de que precisamos. Consideremos que x seja uma variável real que assume valores no intervalo $(-1, 1)$. Então $x^2 \in [0, 1)$. Podemos assim, construir uma série geométrica com primeiro termo igual a 1 e razão $r = -x^2$, que pelo que vimos, é convergente para o número $S = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1+x^2}$, já que $|r| = x^2 < 1$. Temos então que,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots , \tag{1}$$

para qualquer $x \in (-1, 1)$. Observe que esta é uma série geométrica, mas também é uma série alternada. Podemos ainda dizer que é uma série de potências de x, uma vez que seus termos são potências da variável x.

Lembremos agora que a fração $\frac{1}{1+x^2}$, vista como função de x, é a derivada da função arco tangente, $y = \arctan(x) = \text{tg}^{-1}(x)$. Em outras palavras,

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{d}{dx}(\text{tg}^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Integrando esta igualdade e usando a identidade 1,

$$\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right) dx.$$

Recorremos agora ao teorema que garante a integração de uma série de potências. A demonstração deste resultado também pode ser encontrada em (LEITHOLD-1994).

Teorema 5. *Se uma função $f(x)$ possui representação em série de potência de x, isto é, $f(x) = \sum a_n x^n$, e esta série for convergente para $x \in (-c, c) \subset \mathbb{R}$, então*

$$\int f(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int a_n x^n dx\right),$$

para todox $\in (-c, c)$. A convergência da nova série obtida pela integração dos termos, pode ser alterada para $x = \pm c$.

Este teorema nos permite então determinar, por integração, a série da função arco tangente. Temos assim,

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int (-1)^n x^{2n} dx\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\end{aligned}$$

donde obtemos a igualdade,

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots . \tag{2}$$

Esta igualdade é válida para todo x no intervalo $(-1,1)$. Lembremos que a convergência da série 2, obtida por integração, pode ser alterada nos extremos do intervalo $(-1,1)$. Precisamos de investigação particular para $x=\pm 1$. Se $x=1$, a série 2 torna-se,

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

que é uma série alternada que satisfaz as condições do teorema 4 e portanto é convergente. Da mesma forma para $x=-1$. Segue que a igualdade 2 é válida para todo $x\in[-1,1]$. Além disso, como $\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$, então temos a fórmula,

$$\frac{\pi}{4}=\arctan(1)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

ou ainda,

$$\pi=4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{2n+1}. \tag{3}$$

Esta expressão, obtida por volta de 1670, é conhecida como fórmula de Gregory-Leibniz. Calcular π, significa agora calcular a soma do último membro, se isto fosse possível. Quanto mais parcelas da soma infinita conseguirmos adicionar, mais precisa será a estimativa para π.

O problema desta fórmula é que a convergência se dá de forma muito lenta. Não queremos discutir aqui os chamados “níveis de convergência” e então convergência rápida, para nós, significa obter mais casas decimais corretas com menos termos da série adicionados. Vamos utilizar a fórmula 3, e calcular uma aproximação para π, com as 30 primeiras parcelas da soma.

Tabela 1: Aproximação de π pela série de Gregory-Leibniz.

n	$(-1)^n \dfrac{4}{2n+1}$	$\approx \pi$
0	4,0000000	4,0000000
1	-1,3333333	2,6666667
2	0,8000000	3,4666667
3	-0,5714286	2,8952381
4	0,4444444	3,3396825
5	-0,3636364	2,9760461
6	0,3076923	3,2837384
7	-0,2666667	3,0170717
8	0,2352941	3,2523658
9	-0,2105263	3,0418395
10	0,1904762	3,2323157
11	-0,1739130	3,0584027
12	0,1600000	3,2184027
13	-0,1481481	3,0702546
14	0,1379310	3,2081856
15	-0,1290323	3,0791533
16	0,1212121	3,2003654
17	-0,1142857	3,0860797
18	0,1081081	3,1941878
19	-0,1025641	3,0916237
20	0,0975610	3,1891847
21	-0,0930233	3,0961614
22	0,0888889	3,1850503
23	-0,0851064	3,0999439
24	0,0816327	3,1815766
25	-0,0784314	3,1031452
26	0,0754717	3,1786169
27	-0,0727273	3,1058896
28	0,0701754	3,1760650
29	-0,0677966	3,1082684

Note pela Tabela 1, que a primeira casa decimal de π, somente estabiliza-se quando já foram somados 25 termos. Serão necessários 300 termos da série para que a segunda casa decimal seja igual a 4, e 5000 termos para obtermos a terceira casa decimal. Apesar disto, esta fórmula está longe de ser considerada inútil.

De fato, algum tempo mais tarde, John Machin descobriu que a fórmula 2 poderia ser usada com valores de x menores do que 1, obtendo assim, convergências mais rápidas. Isto porque a igualdade 2 é válida para todo $x \in [-1,1]$, e valores de x mais próximos do centro deste intervalo, tornam a convergência mais rápida.

O problema é que não podemos simplesmente substituir $x = \frac{1}{2}$, ou $x = \frac{1}{10}$ em 2 pois não conhecemos $\arctan(\frac{1}{2})$ ou $\arctan(\frac{1}{10})$. É necessário um argumento mais engenhoso. Machin usou a fórmula da soma de arcos para a tangente

$$\operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg}(u) + \operatorname{tg}(v)}{1 - \operatorname{tg}(u)\cdot\operatorname{tg}(v)} \ ,$$

e obteve a identidade

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}(x) - 1}{1 + \operatorname{tg}(x)} \ ,$$

e com $x = 4\arctan(\frac{1}{5})$, escreveu

$$\operatorname{tg}\left(4\arctan(\tfrac{1}{5}) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(4\arctan(\frac{1}{5})\right) - 1}{1 + \operatorname{tg}\left(4\arctan(\frac{1}{5})\right)}.$$

Usando a fórmula da duplicação de arcos para a tangente, Machin calculou

$$\operatorname{tg}\left(2\arctan(\tfrac{1}{5})\right) = \frac{2\cdot\operatorname{tg}\left(\arctan(\frac{1}{5})\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\arctan(\frac{1}{5})\right)} = \frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12},$$

e depois

$$\operatorname{tg}\left(4\arctan(\tfrac{1}{5})\right) = \frac{2\cdot\operatorname{tg}\left(2\arctan(\frac{1}{5})\right)}{1 - \cdot\operatorname{tg}^2\left(2\arctan(\frac{1}{5})\right)} = \frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1 - (\frac{5}{12})^2} = \frac{120}{119},$$

o que o levou a

$$\operatorname{tg}\left(4\arctan(\tfrac{1}{5}) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

Aplicando arco tangente em ambos os membros, e reorganizando os termos, temos a fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\tfrac{1}{5}) - \arctan(\tfrac{1}{239}),$$

que em 1706 foi usada por Machin para calcular 100 casas decimais para π.

A ideia de Machin, de reescrever $\arctan(1)$ em somas de arco tangentes com argumentos menores, motivou outros matemáticos. A igualdade

$$\arctan(\tfrac{1}{z}) = \arctan(\tfrac{1}{m}) + \arctan(\tfrac{1}{n}), \tag{4}$$

com z, m e n inteiros, se mostrou útil nesta abordagem. Note que se $\frac{1}{z} \in [-1,1]$, então esta igualdade fará com que $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$ também estejam no intervalo $[-1,1]$, porém serão números menores que $\frac{1}{z}$. Vamos primeiramente estabelecer qual a relação entre z, m e n para que a identidade 4 tenha sentido. Aplicando tangente em ambos os membros de 4, temos

$$\frac{1}{z} = \text{tg}(\arctan(\tfrac{1}{z})) = \text{tg}\left(\arctan(\tfrac{1}{m}) + \arctan(\tfrac{1}{n})\right).$$

Usando no segundo membro a fórmula da soma de arcos para a tangente temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \text{tg}\left(\arctan(\tfrac{1}{m}) + \arctan(\tfrac{1}{n})\right)\\ &= \frac{\text{tg}(\arctan(\frac{1}{m})) + \text{tg}(\arctan(\frac{1}{n}))}{1 - \text{tg}(\arctan(\frac{1}{m}))\cdot\text{tg}(\arctan(\frac{1}{m}))} = \frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{m}\frac{1}{n}} = \frac{n+m}{mn-1},\end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{1}{z} = \frac{n+m}{mn-1}.$$

Desta igualdade, organizando os termos e somando z^2 em ambos os membros, vem

$$mn - nz - mz + z^2 = 1 + z^2,$$

ou ainda

$$(m-z)(n-z) = 1 + z^2. \tag{5}$$

A igualdade 5 estabelece então uma relação entre z, m e n, para que a identidade 4 faça sentido. Como estamos interessados em desmembrar $\arctan(1)$ então faremos $z = 1$ em 4 e 5, obtendo

$$(m-1)(n-1) = 1 + 1^2 = 2.$$

Basta então considerar $(m-1)$ e $(n-1)$ como sendo dois fatores inteiros do número 2. Escolhemos os fatores 1 e 2, obtendo

$$\begin{aligned}(m-1) = 1 &\quad\Rightarrow\quad m = 2,\\ (n-1) = 2 &\quad\Rightarrow\quad n = 3,\end{aligned}$$

e substituindo $z = 1$, $m = 2$ e $n = 3$ em 4, temos a fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \arctan(\tfrac{1}{2}) + \arctan(\tfrac{1}{3}), \tag{6}$$

que foi obtida por Euler em 1738.

Observe que podemos novamente repetir esta ideia para modificar as arco tangentes das frações $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$ por outra soma de arco tangentes com argumentos menores ainda, para fazer convergências mais rápidas. Este foi um método muito utilizado por matemáticos e várias fórmulas foram obtidas, conhecidas como fórmulas do tipo Machin. Algumas delas são:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(\tfrac{1}{2}) + \arctan(\tfrac{1}{5}) + \arctan(\tfrac{1}{8}) \qquad \text{(Strassnitzky)}$$
$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan(\tfrac{1}{3}) + \arctan(\tfrac{1}{7}) \qquad \text{(Huton)}$$
$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\tfrac{1}{5}) - \arctan(\tfrac{1}{70}) + \arctan(\tfrac{1}{99}) \qquad \text{(Euler, 1764)}$$
$$\frac{\pi}{4} = 8\arctan(\tfrac{1}{10}) - \arctan(\tfrac{1}{239}) - 4\arctan(\tfrac{1}{515}) \qquad \text{(Klingenstierna)}$$
$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan(\tfrac{1}{18}) + 8\arctan(\tfrac{1}{57}) - 5\arctan(\tfrac{1}{239}) \qquad \text{(Gauss)}$$
$$\frac{\pi}{4} = 3\arctan(\tfrac{1}{4}) + \arctan(\tfrac{1}{20}) + \arctan(\tfrac{1}{1985}) \qquad \text{(Loney, 1893)}$$
$$\frac{\pi}{4} = 22\arctan(\tfrac{1}{38}) + 17\arctan(\tfrac{7}{601}) + 10\arctan(\tfrac{7}{8149}) \qquad \text{(Sebah)}$$
$$\frac{\pi}{4} = 44\arctan(\tfrac{1}{57}) + 7\arctan(\tfrac{1}{239}) - 12\arctan(\tfrac{1}{682}) + 24\arctan(\tfrac{1}{12943}) \qquad \text{(Stormer, 1896)}$$
$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan(\tfrac{1}{49}) + 32\arctan(\tfrac{1}{57}) - 5\arctan(\tfrac{1}{239}) + 12\arctan(\tfrac{1}{110443}) \qquad \text{(Takano, 1982)}$$

A fórmula de Strassnitzky, é obtida a partir da fórmula de Euler, desmembrando o termo $\arctan(\frac{1}{3})$. Vamos ver os detalhes. Considerando $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}$, e portanto $z = 3$, em 4 e 5, obtemos

$$(m-3)(n-3) = 1 + 3^2 = 10.$$

Escolhemos agora dois fatores de 10. Tomemos os fatores 2 e 5. Então

$$\begin{aligned} (m-3) = 2 \quad &\Rightarrow \quad m = 5, \\ (n-3) = 5 \quad &\Rightarrow \quad n = 8, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \arctan(\tfrac{1}{2}) + \arctan(\tfrac{1}{3}) \\ &= \arctan(\tfrac{1}{2}) + \arctan(\tfrac{1}{5}) + \arctan(\tfrac{1}{8}). \end{aligned}$$

A fórmula de Huton é obtida, também a partir da fórmula de Euler, desmembrando o termo $\arctan(\frac{1}{2})$. Considerando $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, isto é, $z = 2$, e substituindo em 4 e 5, temos

$$(m-2)(n-2) = 1 + 2^2 = 5.$$

Escolhemos agora os fatores, 1 e 5, de 5. Então

$$\begin{aligned} (m-2) = 1 \quad &\Rightarrow \quad m = 3, \\ (n-2) = 5 \quad &\Rightarrow \quad n = 7, \end{aligned}$$

gerando

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \arctan(\tfrac{1}{2}) + \arctan(\tfrac{1}{3}) \\ &= \arctan(\tfrac{1}{3}) + \arctan(\tfrac{1}{7}) + \arctan(\tfrac{1}{3}) \\ &= 2\arctan(\tfrac{1}{3}) + \arctan(\tfrac{1}{7}).\end{aligned}$$

Levando em conta ainda que podemos considerar que os fatores, $(m-z)$ e $(n-z)$, do número z^2+1 sejam inteiros negativos, e usando o fato de que arco tangente é uma função ímpar, isto é, $\arctan(-\frac{1}{n}) = -\arctan(\frac{1}{n})$, conseguimos o cancelamento de termos em algumas substituições. Mais ainda, z, m e n não precisam ser números inteiros. Podemos verificar que

$$\arctan(\tfrac{1}{3}) = \arctan(\tfrac{1}{7}) + \arctan(\tfrac{2}{11}),$$

e que

$$\arctan(\tfrac{2}{11}) = \arctan(\tfrac{1}{7}) + \arctan(\tfrac{3}{79}),$$

e substituindo estas duas igualdades na fórmula de Huton, obtém-se

$$\frac{\pi}{4} = 5\arctan(\tfrac{1}{7}) + 2\arctan(\tfrac{3}{79}). \tag{7}$$

Desta vez, deixamos os detalhes para o leitor.

Vamos comparar os resultados obtidos na Tabela 1, calculando agora uma aproximação de π pela série de Euler 6. Fazendo $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{3}$ em 2, temos

$$\arctan(\tfrac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)}, \qquad \text{e} \qquad \arctan(\tfrac{1}{3}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}(2n+1)}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\pi &= 4\arctan(\tfrac{1}{2}) + 4\arctan(\tfrac{1}{3}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{2^{2n+1}(2n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{3^{2n+1}(2n+1)}.\end{aligned}$$

Abaixo segue uma tabela, de convergência para π, usando os 15 primeiros termos desta série.

Tabela 2: Aproximação de π pela série de Euler.

n	$S_1 = \frac{(-1)^n 4}{2^{2n+1}(2n+1)}$	$S_2 = \frac{(-1)^n 4}{3^{2n+1}(2n+1)}$	$S_1 + S_2$	$\approx \pi$
0	2,0000000000 &	1,3333333333	3,3333333333	3,3333333333
1	-0,1666666667 &	-0,0493827160	-0,2160493827	3,1172839506
2	0,0250000000 &	0,0032921811	0,0282921811	3,1455761317
3	-0,0044642857 &	-0,0002612842	-0,0047255699	3,1408505618
4	0,0008680556	0,0000225801	0,0008906357	3,1417411974
5	-0,0001775568	-0,0000020527	-0,0001796096	3,1415615879
6	0,0000375601	0,0000001930	0,0000377531	3,1415993410
7	-0,0000081380	-0,0000000186	-0,0000081566	3,1415911844
8	0,0000017952	0,0000000018	0,0000017970	3,1415929813
9	-0,0000004015	-0,0000000002	-0,0000004017	3,1415925796
10	0,0000000908	0,0000000000	0,0000000908	3,1415926705
11	-0,0000000207	-0,0000000000	-0,0000000207	3,1415926497
12	0,0000000048	0,0000000000	0,0000000048	3,1415926545
13	-0,0000000011	-0,0000000000	-0,0000000011	3,1415926534
14	0,0000000003	0,0000000000	0,0000000003	3,1415926536

Observe que esta série converge muito mais rápido do que a série 3. Com apenas 15 termos adicionados, temos 9 casas decimais corretas de π. Note ainda que na terceira coluna, os valores vão para zero mais rápido do que na segunda coluna. Como dissemos antes, isto ocorre pois a terceira coluna representa os valores da série arco tangente de $\frac{1}{3}$, e $\frac{1}{3}$ está mais próximo de 0 do que $\frac{1}{2}$.

Apenas como ilustração, apresentaremos agora outras expressões desenvolvidas para o cálculo de π, que não são necessariamente baseadas em arco tangente. Algumas delas não são séries de termos racionais. Mais ainda, algumas destas expressões, não são séries.

Em 1593, o francês François Viète, desenvolveu a igualdade

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \cdots .$$

Esta é considerada a primeira fórmula infinita para π. Alguns anos mais tarde, Euler provou que a fórmula de Viète é um caso particular da identidade

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdot \cos\frac{x}{16} \cdot \cos\frac{x}{32} \cdot \cdots \cdot \cos\frac{x}{2^n} \cdot \cdots ,$$

com $x = \frac{\pi}{2}$. A identidade obtida por Euler é conseguida substituindo-se recursivamente $\operatorname{sen} x = 2 \cdot \operatorname{sen}(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$. Viète ainda usou o método de Arquimedes e calculou π com 10 casas decimais usando um polígono de $393216 = 6 \cdot 2^{16}$ lados.

Em 1655 John Wallis provou que

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots.$$

Foi a primeira vez que π foi escrito explicitamente em termos de números racionais. Euler generalizou esta fórmula também, mostrando que

$$\frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Com $x = \frac{1}{2}$ recupera-se o produto de Wallis.

Em 1676 Newton usou a série de potências da função arco seno

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

que converge para $x \in (-1,1)$ e com $x = \frac{1}{2}$ obteve

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{4n}(n!)^2}\frac{3}{2n+1}.$$

Uma série de boa convergência, cuja soma dos 50 primeiros termos, fornece 30 dígitos exatos de π.

Em 1755, Euler descobriu outra expansão para a função arco tangente,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}} \tag{8}$$

válida para todo x real. Usando $x = 1$, obtemos a fórmula

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!},$$

que fornece 30 dígitos de π com os 100 primeiros termos. Euler usou a sua série 8, para as arco tangentes da igualdade 7, e calculou em uma hora, 20 casas decimais para π. Algumas outras identidades para o número π são devidas a Euler, como por exemplo

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{2k-1}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2\cdot 3}{3\cdot 5} + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots \tag{em 1735}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{p^2}{p^2-1} = \frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdots$$

onde $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\}$ é o conjunto dos números primos, que é um conjunto infinito.

O indiano Srinivasa Ramanujan, em 1914, apresentou sem demonstração a impressionante fórmula

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

Séries deste tipo possuem convergência extraordinária. Esta série fornece 8 casas decimais corretas de π a cada termo adicionado. William Gosper usou esta fórmula em 1985 para calcular 17 milhões de dígitos de π. Ainda a Ramanujan é atribuída a fórmula

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^3\frac{42n+5}{2^{12n+4}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{((2n)!)^3}{(n!)^6}\frac{42n+5}{2^{12n+4}},$$

dentre muitas outras.

As séries do tipo Ramanujan foram melhoradas. Em 1987, os irmãos Gregory e David Chudnovsky descobriram

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!(13591409+545140134n)}{(n!)^3(3n)!(640320^3)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Esta série fornece cerca de 14 casas decimais corretas a cada termo adicionado.

Em 1988 os irmãos Jonathan e Peter Borwein deram uma demonstração para a fórmula de Ramanujan. Eles ainda generalizaram o método e em 1993, obtiveram

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!(A+Bn)}{(n!)^3(3n)!(C^3)^{n+\frac{1}{2}}},$$

com os coeficientes

$$\begin{aligned} A &= 212175710912\sqrt{61} + 1657145277365, \\ B &= 13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750, \\ C &= 5280(236674 + 30303\sqrt{61}). \end{aligned}$$

Esta série consegue 25 dígitos de π a cada termo adicionado. Ainda em 1993 os irmãos

Borwein obtiveram,

$$
\begin{aligned}
A &= 5280419026080999965452185 + 2361475178400070170568800\sqrt{5} \\
&\qquad + 32\sqrt{5}\begin{pmatrix} 1089172855117117820046743621239520916038565601 7 \\ + \quad 487092908657881022507733853454168872135125504 0\sqrt{5} \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}, \\
B &= 6541592044580522675241457 50 + 2925488898550776690804672 00\sqrt{5} \\
&\qquad + 209664\sqrt{3110}\begin{pmatrix} 6260208323789001636993322654444020882161 \\ + \quad 2799650273060444296577206890718825190235\sqrt{5} \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}, \\
C &= 214772995063512240 + 96049403338648032\sqrt{5} \\
&\qquad + 1296\sqrt{5}\begin{pmatrix} 10985234579463550323713318473 \\ + \quad 4912746253692362754607395912\sqrt{5} \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Com estes coeficientes a série fornece 50 dígitos corretos de π para cada termo adicionado.

Embora estas séries convirjam muito rápido, elas possuem uma desvantagem com relação às séries baseadas em arco tangente. Estas últimas não são séries de números racionais. Nestes casos, supondo que desejamos obter π com uma certa precisão decimal, é necessário que se conheça com a mesma precisão os números irracionais que aparecem nas constantes A, B, C e em $(C^3)^{n+\frac{1}{2}}$. Isto sem falar nos termos envolvendo fatorial que também são de alto custo computacional.

Em 2002, quando Yasumasa Kanada bateu o recorde calculando 1,24 trilhão de dígitos de π, ao invés de séries do tipo Ramanujan, ele usou a série em arco tangente de Takano para calcular, e a de Stormer para confirmar. Daisuke Takahashi, batendo o recorde de Kanada em 2009, usou o algoritmo de Gauss-Legendre para calcular e um algoritmo de Borwein para verificar.

Em 1997 a fórmula

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

foi descoberta por Bailey, Borwein e Plouffe. Esta série originou outras séries parecidas, que são conhecidas como séries do tipo BBP. Esta série é muito interessante, pois permite calcular em base 16 (e consequentemente em base 2) qualquer um dos dígitos decimais de π sem precisar calcular os dígitos precedentes. Uma generalização desta série é

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4+8k}{8n+1} - \frac{8k}{8n+2} - \frac{4k}{8n+3} - \frac{2+8k}{8n+4} - \frac{1+2k}{8n+5} - \frac{1+2k}{8n+6} + \frac{k}{8n+7}\right),$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Fazendo $k = 0$, nesta última série obtemos a primeira. Outras séries deste tipo são

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \left(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} \right),$$
$$\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{384}{n+2} + \frac{45}{4n+2} - \frac{1215}{4n+6} - \frac{12}{n+1} \right),$$
$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{285}{2(2n+1)} - \frac{667}{32(4n+1)} - \frac{5103}{16(4n+3)} + \frac{35625}{32(4n+5)} - \frac{238}{n+1} \right).$$

O número π também pode ser representado por frações continuadas (ou frações contínuas). Dentre as várias representações conhecidas, citamos

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{11 + \cfrac{6^2}{13 + \ddots}}}}}}$$

que é atribuída a Lambert (o que provou a irracionalidade de π).

Em 2006, Plouffe ainda encontrou séries interessantes envolvendo π,

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{72}{n(e^{n\pi}-1)} - \frac{96}{n(e^{2n\pi}-1)} + \frac{24}{n(e^{4n\pi}-1)} \right),$$
$$\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{120}{n^2(\cosh(n\pi)-1)} - \frac{420}{n^2(\cosh(2n\pi)-1)} + \frac{120}{n^2(\cosh(4n\pi)-1)} \right),$$
$$\pi^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{360}{n^3 \mathrm{senh}(n\pi)} - \frac{90}{n^3 \mathrm{senh}(2n\pi)} \right).$$

Note que estas fórmulas não podem ser usadas para calcular π, uma vez que π aparece em ambos os membros da igualdade. Estas fórmulas são úteis em outros ramos da matemática, como o cálculo das chamadas funções zeta.

Para uma coleção maior de fórmulas envolvendo π recomendamos Sebah (SEBAH-2004), (EYMARD-2004) e também (WEISSTEIN-2009). Comentários e demonstrações sobre várias fórmulas aqui apresentadas podem ser encontrados em (EYMARD-2004).

Por fim, resta ainda uma pergunta: "Porque calcular π com tantas casas decimais?" Talvez apenas curiosidade, talvez desafio, talvez porque é possível, talvez... Sabe-se que umas poucas casas decimais resolvem todos os problemas práticos de engenharia, física ou matemática. Para ser mais preciso, 39 casas decimais permitem calcular a medida da circunferência do universo com erro menor do que o diâmetro de um átomo de hidrogênio.

Uma aplicação prática é sem dúvida o teste de microprocessadores. Quando um computador ou um processador numérico é desenvolvido, é necessário saber até que ponto sua eficiência numérica é confiável, e nestes termos, nada melhor do que testá-lo a calcular um número já conhecido. Calcular dígitos de π, já não é mais uma questão de conhecer este número, mas sim de comprovar o poder dos computadores.

Mas se este for o objetivo, poderia ser o número e, poderia ser $\sqrt{2}$, ou ainda $\ln 2$, e então: "Porque π?".

Referências

[EYMARD-2004] EYMARD, P; LAFON, J. **The number π.** Tradução de Stephen S. Wilson, AMS, Providence, Rhode Island, 2004.

[FIGUEIREDO-2002] FIGUEIREDO, Djairo G. de. **Números irracionais e transcendentes.** 3^a edição revisada, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matematica, 2002.

[LEITHOLD-1994] LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica.** Vol II, 3^a edição, São Paulo: Editora Harbra, 1994.

[SEBAH-2004] SEBAH, Pascal; GOURDON, Xavier. **Collection of series for π.** 2004.

[WEISSTEIN-2009] WEISSTEIN, Eric. **MathWorld.** Wolfram Research. http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas Acesso em 08/10/2009.