REMat
ISSN 2177-5095
nº2 - 2010
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

A integral e o comprimento de arco

Adriano de Aquino Paiva da Silva
Graduando em Projetos Mecânicos
Faculdade de Tecnologia de Mogi Mirim - FATEC
adriano.aquino@hotmail.com

Resumo

Este artigo demonstra a aplicação da Integral no cálculo de comprimento de arcos. Esta aplicação é conhecida como Integral de Linha.

Palavras-chave: Comprimento de arco, Integral de linha.

Integral and arc lenght

Abstract

This article deals with the application of Integral in calculating the arc length. This application is known as the Line Integral.

Keywords: Arc length, line Integral.

1 Introdução

Esse artigo mostra como aplicar a integral no cálculo de comprimento de um arco, para esse tipo de estudo, é preciso ter um bom domínio de cálculo para se resolver a Integral de Linha, que é o tipo de integral formulada para essa aplicação.

Comprimento do arco de uma circunferência

As principais referências para esta seção são (BOULOS-1987) e (HALLIDAY-2006). Imaginemos que queremos saber o comprimento do arco AB, da figura 1, onde r é o comprimento do raio e α é o ângulo em graus.

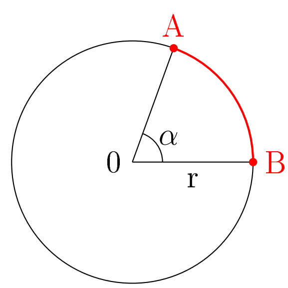


Figura 1: Circunferência

Sabemos que quando o comprimento do arco é igual ao valor do raio, então temos o valor do ângulo em radianos.

Ou seja:

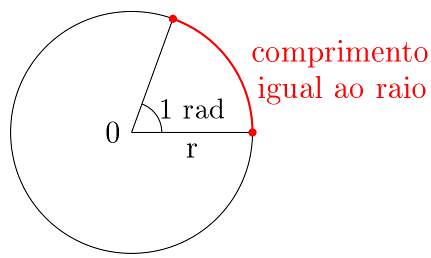


Figura 2: Radiano

Se tivermos uma circunferência completa com o perímetro no valor de $2\pi r$, e raio no valor de r, então teremos o ângulo com o valor de $2\pi\, rad$, que é o mesmo que 360°.

Vamos usar o valor do ângulo em radianos com o símbolo ω :

$$\omega_{rad} = \frac{2\pi r}{r}$$

$$\omega_{rad} = 2\pi \tag{1}$$

Podemos simplificar dizendo que $2\pi r$ é o comprimento da circunferência que chamaremos de C. Então podemos compreender que o comprimento da circunferência C é:

$$C = r \cdot \omega \tag{2}$$

Se tivermos o valor do raio e o valor do ângulo em graus, podemos desenvolver uma equação na qual não seja necessária a conversão de grau para radiano.

Já sabemos que 360° é igual a $2\pi\, rad$, então:

$$\begin{array}{rcl} 360^\circ & \longleftrightarrow & 2\cdot\pi\ rad \\ \alpha^\circ & \longleftrightarrow & \omega\ rad \end{array}$$

Simplificando temos

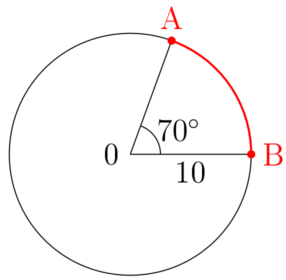
$$\omega = \frac{\alpha \cdot \pi}{180} \tag{3}$$

aplicando 3 em 2 temos

$$C = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r}{180} \tag{4}$$

Calculando o arco de uma circunferência

Para calcular o comprimento do arco AB, de raio 10, e ângulo igual a 70°, aplicaremos a equação 4, onde u.c. significa unidade de comprimento.



$$\begin{aligned} C &= \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r}{180} \\ &= \frac{70 \cdot \pi \cdot 10}{180} \\ &= 12,21\ u.c. \end{aligned}$$

Figura 3: Arco

Comprimento do arco de uma função

As principais referências para esta seção são (STEWART-2006) e (LEITHOLD-1994)E se tivéssemos que calcular o comprimento de um arco que não fosse uma circunferência? A figura 3 mostra essa situação. Para isso precisamos saber a função que descreve esse arco, do qual se deseja descobrir o comprimento.

O comprimento da curva será a somatória de todos os pequenos segmentos formados por pontos da função, para isso usaremos a integral para determinar essa somatória. Partiremos da Integral de linha, que descreve essa somatória, que é:

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} f(x)\right)^2}\, dx \tag{5}$$

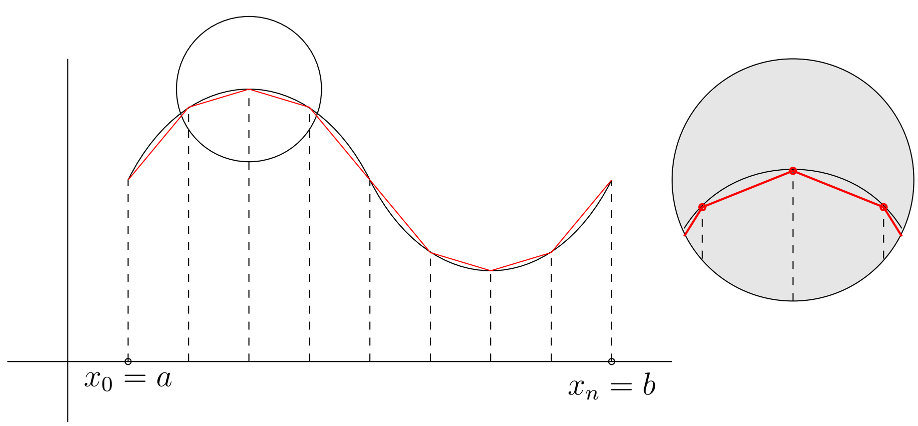


Figura 3: Função de uma curva

Calculando o arco de uma função

Para calcular o comprimento da curva da função x^2, de 0 a 1, aplicaremos a equação 5

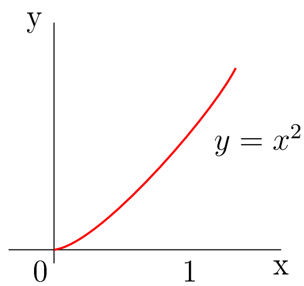


Figura 4: Gráfico de uma função

$$
\begin{aligned}
C &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}x^2\right)^2} dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx \\
&= 1,487 u.c.
\end{aligned}
$$

Conclusões

Para o cálculo de um arco de uma circunferência, podemos facilmente aplicar a equação 4, precisando apenas saber o valor do raio e o ângulo. Já para uma curva de uma função qualquer, é preciso aplicar a Integral de Linha, o que exige uma certa habilidade em cálculo; sabendo a função que descreve a curva é possível calcular os mais diversos comprimentos. Aplicações estão disponíveis em (ROSA-2009).

Referências

[BOULOS-1987] BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria Analítica** – Um Tratamento Vetorial. 2ed. São Paulo: Makron Books.

[HALLIDAY-2006] Halliday D, Resnick R, Walker J; **Fundamentos de Física** – Mecânica, 7ªed. Editora LTC, 2006

[STEWART-2006] STEWART, J. **Cálculo** vol. 1 - 6ª edição, Editora Thomson, 2006

[LEITHOLD-1994] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** 3ª. ed. São Paulo: Harbra, 1994

[ROSA-2009] ROSA, W.A. **Problemas resolvidos de Resistência dos materiais.** Disponível em http://www.profwillian.com/materiais/index.asp. Acesso em 22 abr. 2010.