REMat
ISSN 2177-5095
nº2 - 2010
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

Existência e unicidade de solução de um sistema híbrido

Flávio Gomes de Moraes
Professor da Universidade Estadual de Goiás - Unidade de Jataí.
flaviomoraesbr@yahoo.com.br

Resumo

Neste trabalho nos propomos a estudar a existência e unicidade de solução do seguinte problema: Dado T suficientemente grande e um dado inicial $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$ em um espaço que está em nossa disposição, encontrar um controle $\beta = \beta(x,t) \in H^{-2}(0,T; L^2(0,1))$ tal que a solução do sistema

$$\begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta\Phi = 0 & em \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 & sobre \;\; \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = -W_t & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = 0 & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_x(0,t) = W_x(1,t) = 0 & para \;\; t \;\in\; (0,\infty) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & em \;\; \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & sobre \;\; \Gamma_0. \end{cases}$$

onde $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$ está em um espaço a nossa disposição.

Palavras chaves: Equação da onda, Operador maximal monótono.

Existence and uniqueness of solution of a hybrid system

Abstract

In this work we consider to study the existence and unicity of solution of the following problem: $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$ in a suitable space we want to obtain a control $\beta = \beta(x,t) \in H^{-2}(0,T; L^2(0,1))$ such that the solution of the system

$$\begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta\Phi = 0 & em \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 & sobre \;\; \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = -W_t & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = 0 & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_x(0,t) = W_x(1,t) = 0 & para \;\; t \;\in\; (0,\infty) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & em \;\; \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & sobre \;\; \Gamma_0. \end{cases}$$

where $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$ is in a space at our disposal.

Keywords: Wave equation, Monotone maximal operator

1 Introdução

Considere Ω o quadrado bidimensional

$$\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2.$$

Vamos supor que Ω é ocupado por um fluído elástico, não viscoso e compressível, cujo campo de velocidade $\overrightarrow{v}$ é dado pelo potencial $\Phi = \Phi(x,y,t)$: $\overrightarrow{v} = \nabla\Phi$.

Vamos supor também que o potencial Φ satisfaz a equação linear da onda em $\Omega \times (0,\infty)$.

A fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω está dividida em duas partes. $\Gamma_0 = \{(x,0) : x \in (0,1)\}$ e $\Gamma_1 = \Gamma \backslash \Gamma_0$. O subconjunto Γ_1 é suposto rígido e impomos que a velocidade normal do líquido seja zero nele. O subconjunto Γ_0 é suposto flexível e ocupado por uma corda flexível que vibra com a pressão do líquido no plano onde Ω se encontra. O deslocamento de Γ_0 é descrito por uma função escalar $W = W(x,t)$, que obedece a equação da onda unidimensional. Ainda, em Γ_0 vamos impor a continuidade da velocidade normal do líquido na corda. A corda é suposta para satisfazer as condições de fronteira de Neumann em seus extremos, detalhes em (MICU-1996a; MICU-1997; MICU-1998).

Consideraremos também que todas as deformações, são suficientemente pequenas de modo que a teoria linear se aplique. Sob condições iniciais naturais para Φ e W o movimento linear deste sistema é descrito por meio das equações de onda acopladas:

$$\begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta\Phi = 0 & em \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 & sobre \;\; \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -W_t & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = 0 & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_x(0,t) = W_x(1,t) = 0 & para \;\; t \;\; \in \;\; (0,\infty) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & em \;\; \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & sobre \;\; \Gamma_0 \end{cases} \tag{1}$$

Analisando o sistema 1 podemos observar que este acopla duas equações diferenciais que descrevem as vibrações de estruturas de natureza diferente (fluído e corda). Por esta razão, pela qual consideramos que nosso sistema é um sistema híbrido. Veja também que o sistema 1 possui duas equações com derivadas parciais, uma bidimensional e outra unidimensional, e é devido a isso que consideremos que o nosso sistema é um sistema híbrido bidimensional.

Estudaremos a existência e unicidade de solução forte e fraca do sistema 1.

2 Existência e Unicidade de Solução

Como mencionamos na introdução, este estudo será dedicado para garantirmos a existência e unicidade das soluções do sistema 1, assim como as propriedades elementares de continuidade com respeito aos dados iniciais. Para assegurarmos tais resultados, lançaremos mão da teoria hilbertiana dos operadores maximais-monótonos (BREZIS-1984) e o Teorema de Hille-Yosida (LIONS-1972; LIONS-1988). Primeiramente, vamos escrever o sistema 1 de forma abstrata que nos permite o estudo das soluções em um espaço de energia finita.

Seja o espaço $\mathcal{X} = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$. Definimos em $\mathcal{X}$ o produto escalar:

$$(f,g) = \int_\Omega (\nabla f_1 \circ \nabla g_1 + f_1 g_1) dxdy + \int_\Omega f_2 g_2 dxdy + \int_{\Gamma_0} ((f_3)_x (g_3)_x + f_3 g_3) dx + \int_{\Gamma_0} f_4 g_4 dx,$$

$$\forall\ f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \quad e \quad \forall\ g = (g_1, g_2, g_3, g_4) \quad \in \mathcal{X}.$$

onde $\circ$ representa o produto escalar em $\mathbb{R}^2$. Desta forma $(\mathcal{X}, (.,.))$ é um espaço de Hilbert.

Para prosseguirmos definimos os seguintes operadores:

$$B \in \mathcal{L}(H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0), (H^1(\Omega))')$$

tal que

$$\langle B(\phi,\gamma,\omega,V), \varphi \rangle = \int_\Omega (\nabla\phi . \nabla\varphi) dxdy - \int_{\Gamma_0} V\varphi dx$$

e ainda

$$C \in \mathcal{L}(H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0), (H^1(\Gamma_0))')$$

onde

$$\langle C(\phi,\gamma,\omega,V), \psi \rangle = \int_{\Gamma_0} \omega_x \psi_x dx + \int_{\Gamma_0} \gamma\psi dx.$$

Com o intuito de aplicar a teoria acima mencionada, buscaremos um operador A, tal que $A + \mathcal{I}$ seja maximal e monótono em $\mathcal{X}$.

Consideremos o operador $(D(A), A)$ definido por:

$$\begin{aligned} D(A) \quad = \quad & \Big\{\ U = (\phi,\gamma,\omega,V) \in\ H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0) : \\ & B(U) \in L^2(\Omega),\ C(U) \in L^2(\Gamma_0), \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0\ sobre\ \Gamma_1, \\ & \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = V\ \ sobre\ \Gamma_0,\ \omega_x(0) = \omega_x(1) = 0 \Big\} \\ & A(\phi,\gamma,\omega,V) = (-\gamma, B(\phi,\gamma,\omega,V), -V, C(\phi,\gamma,\omega,V)) \end{aligned} \tag{2}$$

Vejamos em seguida em que sentido se cumprem as condições de contorno presentes na definição do domínio $D(A)$.

De $C(U) \in L^2(\Gamma_0)$ e usando o resultado de regularidade para o Laplaciano em dimensão um (veja (BREZIS-1984)) com condições de Neumann , se obtém que $\omega \in H^2(\Gamma_0)$ se $U \in D(A)$ e portanto o traço ω_x está bem definido.

Em segundo lugar o elemento, $U = (\phi, \gamma, \omega, V) \in D(A)$ tem que cumprir as condições $B(U) \in L^2(\Omega)$, o que, na forma diferencial se escreve:

$$\begin{cases} -\Delta\phi \in L^2(\Omega) \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0 \ sobre \ \Gamma_1 \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = V \ \in H^1(\Gamma_0) \ sobre \quad \Gamma a_0 \end{cases}$$

Como o domínio Ω é uma poligonal não podemos deduzir que $\phi \in H^2(\Omega)$ usando diretamente os resultados clássicos de regularidade para o Laplaciano, já que em geral neste tipo de domínio a função pode ser menos regular em seus vértices. No entanto resultados de regularidade (GRISVARD-1985, pg 263), nos assegura que em nosso caso, devido aos valores particulares dos ângulos (iguais a $\frac{\pi}{2}$) e convexidade do domínio Ω, não perdemos a regularidade. Resulta que $\phi \in H^2(\Omega)$ e portanto $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}$ sobre Γ_0 tem sentido como traço.

Dos comentários feitos acima concluímos que:

$$D(A) \subset H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0).$$

Com estas definições e considerando $U = (\phi, \phi_t, \omega, \omega_t)$ o sistema 1 se escreve:

$$\begin{cases} U_t(t) + AU(t) = 0 \ \ para \ t \ \in \ (0, \infty) \\ U(0) = (\phi^0, \phi^1, \omega^0, \omega^1) \ \in D(A) \\ U(t) \in D(A), \forall t \in (0, \infty) \end{cases} \tag{3}$$

De fato, como $U_t(t) + AU(t) = 0$, segue que

$$(\phi_t, \phi_{tt}, \omega_t, \omega_{tt}) + (-\phi_t, B(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t), -\omega_t, C(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t)) = 0$$

e portanto temos que:

$$\phi_{tt} + B(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t) = 0 \tag{4}$$

$$\omega_{tt} + C(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t) = 0 \tag{5}$$

De 4 obtemos que:

$$(\phi_{tt}, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (B(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t), \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$(\phi_{tt}, \varphi)_{L^2(\Omega)} \ + \int_\Omega \nabla\phi\nabla\varphi dxdy - \int_{\Gamma_0} \omega_t\varphi dx = 0 \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$(\phi_{tt}, \varphi)_{L^2(\Omega)} - (\Delta\phi, \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

donde segue que $\phi_{tt} - \Delta\phi = 0$ obtendo assim a primeira equação de (1).

De (5) obtemos que:

$$(\omega_{tt}, \psi)_{L^2(0,1)} + (C(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t), \psi)_{L^2(0,1)} = 0 \qquad \forall\ \psi \in \mathcal{D}(0,1)$$

$$(\omega_{tt}, \psi)_{L^2(0,1)} + (\omega_x, \psi_x)_{L^2(0,1)} + (\phi_t, \psi)_{L^2(0,1)} = 0 \quad \forall\ \psi \in \mathcal{D}(0,1)$$

$$(\omega_{tt}, \psi)_{L^2(0,1)} - (\omega_{xx}, \psi)_{L^2(0,1)} + (\phi_t, \psi)_{L^2(0,1)} = 0 \quad \forall\ \psi \in \mathcal{D}(0,1)$$

Logo, $\omega_{tt} - \omega_{xx} + \phi_t = 0$, donde temos a segunda equação de (1). As demais condições segue diretamente da definição do $D(A)$. Portanto temos que o sistema (1) pode ser reescrito como (3) com havíamos afirmado.

De posse de (3) enunciaremos e demonstraremos o resultado que nos garante a existência e unicidade de solução do problema (1), bem como a continuidade com respeito aos dados iniciais, concluindo assim o objetivo principal deste estudo.

Teorema 1. *Se A é o operador definido em (2) então:*

I. $A + \mathcal{I}$ é um operador maximal e monótono em $\mathcal{X}$;

II. ***Soluções fortes:*** *Se $(\phi^0, \phi^1, \omega^0, \omega^1) \in D(A)$ existe uma única solução $(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t)$ da equação (3) com as seguintes propriedades:*

$$(\phi, \omega) \in C^2\left([0,\infty); L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0)\right) \cap C^1\left([0,\infty; H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0))\right) \cap \\ \cap C\left([0,\infty); H^2(\Omega) \times H^2(\Gamma_0)\right)$$

onde estas soluções verificam o sistema (1) pontualmente.

III. ***Soluções fracas:*** *Se $(\phi^0, \phi^1, \omega^0, \omega^1) \in \mathcal{X}$ existe uma única solução $(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t)$ da equação (3) com as seguintes propriedades:*

$$(\phi, \omega) \in C^1\left([0,\infty); L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0)\right) \cap C\left([0,\infty); H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)\right)$$

Demonstração. Como havíamos comentado anteriormente, nosso primeiro passo será mostrar que o operador $A + \mathcal{I}$ é maximal e monótono em $\mathcal{X}$.

Monótono

Seja $z = (\phi, \gamma, \omega, V) \in D(A)$ arbitrário, teremos:

REMat
ISSN 2177-5095
nº2 - 2010
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

$$
\begin{aligned}
(z,(A+\mathcal{I})z) &= ((\phi,\gamma,\omega,V),(-\gamma,B(\phi,\gamma,\omega,V),-V,C(\phi,\gamma,\omega,V))+(\phi,\gamma,\omega,V))\\
&= (z,z)+((\phi,\gamma,\omega,V),(-\gamma,B(\phi,\gamma,\omega,V),-V,C(\phi,\gamma,\omega,V))\\
&= -\int_\Omega(\nabla\phi.\nabla\gamma+\phi\gamma)dxdy-\int_{\Gamma_0}(\omega_xV_x+\omega V)dx\\
&\quad+\int_\Omega\gamma B(\phi,\gamma,\omega,V)dxdy+\int_{\Gamma_0}VC(\phi,\gamma,\omega,V)+(z,z)\\
&= -\int_\Omega(\nabla\phi.\nabla\gamma+\phi\gamma)dxdy-\int_{\Gamma_0}(\omega_xV_x+\omega V)dx\\
&\quad\langle B(\phi,\gamma,\omega,V),\gamma\rangle+\langle C(\phi,\gamma,\omega,V),V\rangle+(z,z)\\
&= -\int_\Omega(\nabla\phi.\nabla\gamma+\phi\gamma)dxdy-\int_{\Gamma_0}(\omega_xV_x+\omega V)dx+\int_\Omega\nabla\phi.\nabla\gamma dxdy\\
&\quad-\int_{\Gamma_0}\gamma V+\int_{\Gamma_0}\omega_xV_xdx+\int_{\Gamma_0}\gamma Vdx+(z,z)\\
&= -\int_\Omega\phi\gamma dxdy-\int_{\Gamma_0}\omega Vdx+\int_\Omega|\nabla\phi|^2dxdy+\int_\Omega|\phi|^2dxdy+\int_\Omega|\gamma|^2dxdy\\
&\quad+\int_{\Gamma_0}|\omega_x|^2dx+\int_{\Gamma_0}|\omega|^2dx+\int_{\Gamma_0}|V|^2dx\\
&= \int_\Omega|\nabla\phi|^2dxdy+\int_{\Gamma_0}|\omega_x|^2dx+\frac{1}{2}\left(\int_\Omega(|\phi|^2+|\gamma|^2)dxdy\right)+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}(\omega^2+V^2)\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_\Omega(|\phi|^2+|\gamma|^2)dxdy-\int_\Omega\phi\gamma+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}(\omega^2+V^2)-\int_{\Gamma_0}\omega Vdx\\
&\geq \int_\Omega|\nabla\phi|^2dxdy+\int_{\Gamma_0}|\omega_x|^2dx+\frac{1}{2}\left(\int_\Omega(|\phi|^2+|\gamma|^2)dxdy\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}(\omega^2+V^2)dx\geq 0
\end{aligned}
$$

onde dos extremos temos que $(z,(A+\mathcal{I})z)\geq 0$ o que mostra que o operador $A+\mathcal{I}$ em questão é monótono.

Maximal

Mostremos agora que o operador $A+\mathcal{I}$ é maximal. Para isso seja $S=(f,g,m,n)\in H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)\times L^2(\Gamma_0)$ arbitrário e busquemos um elemento $z=(\phi,\xi,\omega,\eta)\in D(A)$ tal que $(A+2\mathcal{I})z=S$.

Isto é equivalente a encontrar $(\phi,\xi,\omega,\eta)\in D(A)$ solução de:

REMat
ISSN 2177-5095
nº2 - 2010
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

$$\begin{cases} 2\phi - \xi = f \\ 2\xi + B(\phi,\xi,\omega,\eta) = g \\ 2\omega - \eta = m \\ 2\eta + C(\phi,\xi,\omega,\eta) = n \end{cases} \tag{6}$$

o que por sua vez, se reduz a encontrar $(\phi,\omega) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)$ tal que:

$$\begin{cases} 4\int_\Omega \phi u dxdy + \int_\Omega \nabla\phi.\nabla u dxdy - 2\int_{\Gamma_0} \omega u dx = \int_\Omega (2f+g)u dxdy - \int_{\Gamma_0} m u dx \\ 4\int_{\Gamma_0} \omega v dx + \int_{\Gamma_0} \omega_x v_x dx + 2\int_{\Gamma_0} \phi v dx = \int_{\Gamma_0} (n+2m+f) v dx. \end{cases} \tag{7}$$

para todo $u \in H^1(\Omega)$ e $v \in H^1(\Gamma_0)$. Mostremos a afirmação feita acima, ou seja, que o sistema (6}) é equivalente a (7). De fato, de (6) obtemos :

$$\begin{array}{ll} \xi = 2\phi - f & \Longrightarrow\ 4\phi - 2f + B(\phi,\xi,\omega,\eta) = g \\ \eta = 2\omega - m & \Longrightarrow\ 4\omega - 2m + C(\phi,\xi,\omega,\eta) = n \end{array}$$

e portanto

$$(4\phi, u)_{L^2(\Omega)} - (2f,u)_{L^2(\Omega)} + (B(\phi,\xi,\omega,\eta),u)_{L^2(\Omega)} = (g,u)_{L^2(\Omega)}$$

ou seja,

$$4\int_\Omega \phi u dxdy + \int_\Omega \nabla\phi\nabla u dxdy - 2\int_{\Gamma_0} \omega u dx = \int_\Omega (2f+g)u dxdy - \int_{\Gamma_0} m u dx$$

obtendo assim a primeira equação de (7). Analogamente se obtém a segunda equação.

Com o objetivo de de aplicar o Lema de Lax-Milgram para encontrar (ϕ,ω) mencionado acima, definimos a forma bilinear

$$a\left(H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)\right)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

onde

$$\begin{aligned} a((\phi,\omega),(u,v)) \;=\; & \int_\Omega \nabla\phi.\nabla u dxdy + 4\int_\Omega \phi u dxdy - 2\int_{\Gamma_0} \omega u dx \\ & + \int_{\Gamma_0} \omega_x v_x dx + 4\int_{\Gamma_0} \omega v dx + 2\int_{\Gamma_0} \phi v dx \end{aligned}$$

$\forall\ (\phi,\omega),(u,v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)$.

Definimos também a forma linear

$$L : H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por:

$$L(\phi,\omega)=\int_{\Omega}(2f+g)\phi dxdy-\int_{\Gamma_0}m\phi dx+\int_{\Gamma_0}(n+2m+f)\omega dx$$

$\forall\ (\phi,\omega)\in H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)$.

Claramente "a" é uma forma bilinear. Verifiquemos agora que ela é contínua e coerciva. De fato,

$$\begin{aligned}
a((\phi,\omega),(\phi,\omega)) &= \int_{\Omega}|\nabla\phi|^2dxdy+4\int_{\Omega}|\phi|^2dxdy-2\int_{\Gamma_0}\omega\phi dx+\int_{\Gamma_0}|\omega_x|^2dx \\
&\quad +4\int_{\Gamma_0}|\omega|^2dx+2\int_{\Gamma_0}\omega\phi dx \\
&\geq \|(\phi,\omega)\|^2_{H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)}
\end{aligned}$$

o que nos mostra que a aplicação é coerciva. Para verificarmos que "a" é contínua basta aplicar a Desigualdade Triangular, a continuidade da aplicação traço para então obtermos que

$$|a((\phi,\omega),(u,v))|\leq C\|(\phi,\omega)\|_{H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)}\|(u,v)\|_{H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)},$$

e portanto "a" é contínua.

Mostremos agora que "L" é uma forma linear e contínua. Claramente L é linear, restando apenas mostrar que é contínua. Temos que:

$$|L(\phi,\omega)|\leq\left|\int_{\Omega}(2f+g)\phi dxdy\right|+\left|\int_{\Gamma_0}m\phi dx\right|+\left|\int_{\Gamma_0}(n+2m+f)\omega dx\right|$$

e então usando a Desigualdade de Holder e a continuidade da aplicação traço temos o desejado.

Pelo Lema de Lax-Milgram resulta que existe uma única $(\phi,\omega)\in H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)$ tal que

$$a((\phi,\omega),(u,v))=L(u,v),\ \forall(u,v)\in H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)$$

Da igualdade obtida acima, considerando um elemento da forma $(u,0)$ com $u\in H^1(\Omega)$ obtemos que $a((\phi,\omega),(u,0))=L(u,0)$, ou seja,

$$4\int_{\Omega}\phi udxdy+\int_{\Omega}\nabla\phi.\nabla udxdy-2\int_{\Gamma_0}\omega udx=\int_{\Omega}(2f+g)udxdy-\int_{\Gamma_0}mudx$$

obtendo assim a primeira igualdade de (7).

Considerando agora um elemento da forma $(0,v)$ com $v\in H^1(\Gamma_0)$ temos que $a((\phi,\omega),(0,v))=L(0,v)$, ou seja,

$$4\int_{\Gamma_0}\omega vdx+\int_{\Gamma_0}\omega_xv_xdx+2\int_{\Gamma_0}\phi vdx=\int_{\Gamma_0}(n+2m+f)vdx$$

obtendo a segunda igualdade de (7).

Portanto (ϕ, ω) encontrados acima é solução de (7). Como $\phi \in H^1(\Omega)$ e $\xi = 2\phi - f$ segue que $\xi \in H^1(\Omega)$. Da mesma maneira se obtém que $\eta \in H^1(\Gamma_0)$. Da segunda equação de (7) e de resultados de regularidade (veja (BREZIS-1984)) se obtém que $\omega \in H^2(\Gamma_0)$. Temos ainda, que verifica as condições de contorno $\omega_x(0) = \omega_x(1)$ no sentido clássico, já que $\omega_x \in H^1(\Gamma_0) \subset C[0,1]$.

Por último, os resultados de regularidade para o operador $-\triangle$, com condições de Neumann não homogênea em Ω (GRISVARD-1985, pg.263), implica que a função ϕ, solução da primeira equação de (7), pertence a $H^2(\Omega)$. As condições de contorno para ϕ se cumprem no sentido de traço.

Resulta que existe uma única solução do sistema (6) em $D(A)$ e portanto $A+\mathcal{I}$ é maximal. Logo o operador $A+\mathcal{I}$ é maximal monótono como havíamos afirmado. Finalmente, aplicando o Teorema de Hille-Yosida, obtemos que o sistema:

$$\begin{cases} Z_t(t) + (A+\mathcal{I})Z(t) = 0, & t \in (0,\infty) \\ Z(0) = (\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \ \in \mathcal{X}. \end{cases}$$

possui uma única solução $Z(t)$ com seguinte propriedade de regularidade:

$$\begin{array}{l} Z \in C^1([0,\infty),\mathcal{X}) \cap C([0,\infty), D(A)) \ \textit{se} \ Z(0) \in D(A), \\ Z \in C([0,\infty),\mathcal{X}) \ \textit{se} \ Z(0) \ \in \mathcal{X} \end{array}$$

Se denotarmos por $U(t) = e^t Z(t)$, se deduz que U é solução da equação (3) e que ainda possui todas as propriedades de regularidade de Z. Com isso concluímos a demonstração deste teorema que nos garante a existência e unicidade de solução, bem como a continuidade com respeito aos dados iniciais. □

Referências

[BREZIS-1973] BREZIS, H. **Operateurs maximaux monotones et semigroups de contractions dans les spaces de Hilbert.** North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.

[BREZIS-1984] BREZIS, H. **Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones.** Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[BREZIS-1994] BRÉZIS, H.; CAZENAVE, T. **Nonlinear Evolution Equations.** Preliminary version of chapters 1,2 and 3 and the appendix. 18 Oct 1994.

[CAZENAVE-1998] CAZENAVE, T.; HARAUZ, A. **An Introdution to Semilinear Evolutions Equations** Clarendon Press - Oxford, 1998.

[GRISVARD-1985] GRISVARD, P. **Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.** London: Pitman Publishing Limited, 1985.

[KESAVAN-1989] KESAVAN, S. **Topic in Functional Analysis and Applications.** John \newline Wiley and Sons, New Dehli, 1989.

[LIONS-1988] LIONS, J. L. **Contrôlabilité Exacte Pertubations et Stabilisation de Systèmes Distribués**, Masson, Paris, 1988.

[LIONS-1972] LIONS, J.L., MAGENES. E. **Non-Homogeneous boudary Value Problems ande Applications.** Vol. I. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1972.

[RUIZ-1992] RUIZ, A. **Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential.** J. Math. Pures Appl., v.71, p.455-467, 1992.

[MICU-1996a] MICU, S.D. **Analisis de un Sistema Hibrido Bidimensional Fluido-Estructura.** Ph. D. dissertation at Universidad Complutense de Madrid, 1996.

[MICU-1996b] MICU, S.D.; ZUAZUA, E. **Stabilization and Periodic Solutions of a Hybrid System Arising in the Control of Noise.** International Series of Numerical Mathematics, Vol 126, Birkhauser Verlag, (1996), 4, 207-222.

[MICU-1997] MICU, S.D.; ZUAZUA, E. **Boundary Controllability of a Linear Hybrid System Arising in the Control of Noise.** SIAM. J. Cont. Optim. 35 (1997), nº 5, 1614-1638.

[MICU-1998] MICU, S.D.; ZUAZUA, E. **Asymptotic for the spectrum of a fluid/struture hybrid system arising in the control of noise.** SIAM J. MATH 4 (1998) Anal. 29 , 967-1001.