

DIMENSÃO FRACTAL

Míriem Martins da Silva

Bolsista de Iniciação Científica do Instituto Federal de Goiás - Campus Jataí
miriemmartins@yahoo.com.br

Wallysonn Alves de Souza

Professor do Instituto Federal de Goiás - Campus Jataí
wallysonn@yahoo.com.br

Resumo

O conceito de fractais pode ser aplicado na descrição de certos tipos de estruturas encontradas na natureza e, inclusive, em fenômenos para os quais a geometria euclidiana é falha. Este artigo apresenta um pouco da história do surgimento da teoria dos fractais, expõe alguns exemplos de construção de fractais e por fim define-se duas principais formas de medir a dimensão de um fractal: a dimensão de Hausdorff-Hesicovitch e Box-Counting.

Palavras chaves: Fractal, dimensão fractal, geometria.

FRACTAL DIMENSION

Abstract

The concept of fractais can be applied in the description of certain types of structures found in the nature and, also, phenomena for which Euclidean geometry is imperfection. This article presents a little of the history of the sprouting of theory of the fractais, displays some examples of construction of fractais and finally it defines two main forms to measure the dimension of a fractal: the dimension of Hausdorff-Hesicovitch e Box-Counting.

Keywords: Fractal, fractal dimension, geometry.

1 Introdução

Durante vários séculos os conceitos da geometria euclidiana foram considerados os que melhor descreviam as formas geométricas do mundo em que vivemos. Na metade do século

XIX surgiram vários questionamentos sobre a geometria euclidiana, principalmente em relação ao quinto postulado de Euclides, o que gerou uma grande revolução na história da matemática que foi a descobertas das geometrias não euclidianas. A descoberta de geometrias não euclidianas introduziu novos objetos que representam certos fenômenos do universo, como os fractais que hoje são considerados objetos que retratam formas e fenômenos da natureza, como: nuvens, montanhas, turbulência, árvores, crescimento populacional, vasos sanguíneos e outras formas. As primeiras construções e exemplos de fractais são do século XIX e correspondem às curvas contínuas que não possuem tangentes em todos os pontos. Segundo Plaza (2000, p.1), estas curvas foram construídas para mostrar que a afirmação, “evidente” aos nossos olhos, era falsa:

“O gráfico de uma função contínua possui tangente bem definida em todos os pontos, salvo talvez, em um número finito de seus pontos.” Ainda segundo Plaza (2000, p.1), por muito tempo vários matemáticos tentaram provar a afirmação e alguns até publicaram algumas demonstrações errôneas. Em 1872, Karl Weierstrass encontrou um exemplo de função contínua em todo seu domínio, mas em nenhuma parte diferenciável. De acordo com Weierstrass, B. Riemann havia sido o primeiro a afirmar sua convicção contrária à afirmação acima, e por volta de 1861 chegou a exibir um exemplo errôneo de uma função que contrariava a afirmação. O gráfico de tais funções contínuas e não diferenciáveis em todo ponto é chamado atualmente de fractal. Os exemplos de Riemann e Weierstrass são de caráter analítico, isto é, tem uma fórmula explícita para a função, em geral estas fórmulas são escritas em termos de série de funções, as quais são difíceis de entender geometricamente a razão pela qual seus gráficos não tem tangentes bem definidas (em algum sentido) na maioria de seus pontos. Geometricamente uma função deixa de ter tangente bem definida em um ponto $(x_0, f(x_0))$, quando em seu gráfico, neste ponto, existir uma “ponta”. Em geral as funções não diferenciáveis são escritas em termos de séries e no seu gráfico em cada ponto existe uma “ponta”, o que é difícil de imaginar mentalmente. A função modular $f(x) = |x|$ não possui tangente no ponto $(0, 0)$ pois existe uma ponta neste ponto isto significa que a função modular não é diferenciável no ponto $x = (0, 0)$, como pode ser visto na Figura 1.

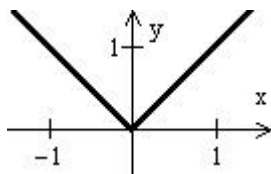


Figura 1: Gráfico da função $f(x) = |x|$

2 Fractal

Benoit Mandelbrot, matemático francês natural da Polônia, descobriu a geometria fractal por volta dos anos 70, sentindo a necessidade de designar um termo para sua geometria, ao

consultar o dicionário de latim de seu filho encontro o adjetivo fractus do verbo frangere que significa irregular ou quebrado criando então a termo fractal. Não é fácil dar uma definição para fractal, em geral são objetos gerados pela repetição de um processo recursivo, apresentando auto-similaridade, complexibilidade e dimensão fracionada. A auto-similaridade é uma das características dos fractais de apresentar cópias de si mesmo em seu interior em diferentes tamanhos. Uma pequena parte é semelhante ao todo, ou seja, uma fração de um fractal é uma replica do todo, isto é, pequenas partes de um fractal em diferentes escalas é semelhante ao todo.

A complexibilidade é uma propriedade dos fractais a qual significa que nunca se pode representa-los completamente, pois os detalhes dos mesmos são infinitos. Sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores. A dimensão dos fractais não é inteira como na geometria euclidiana. Na geometria euclidiana um ponto tem dimensão zero, uma linha é unidimensional, o plano bidimensional, o sólido tridimensional, já os fractais tem dimensão fracionada que está relacionada ao grau de irregularidade dos mesmos.

2.1 Curva de Bolzano

Em 1830, o padre Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano matemático, teólogo e filósofo de Praga, foi o primeiro a construir um modelo geométrico de uma função contínua não diferencial, ou seja, o seu gráfico não possui tangente em nenhum de seus pontos, o seu trabalho só foi conhecido em 1921, após a construção da curva de Koch. A construção da curva de Bolzano inicia-se com um reta e na primeira etapa de construção da curva, esta mesma reta é transformada em um polígono e nas etapas seguintes são adicionados polígonos semelhantes aos da primeira etapa, porém, de tamanho menor em relação aos das etapas anteriores. Repetindo esse processo indefinidamente, obtém-se um gráfico de uma função contínua, no qual em cada etapa de construção os pontos angulosos são conservados e novos se agregam a eles de forma que em cada ponto deste gráfico existirá uma ponta.

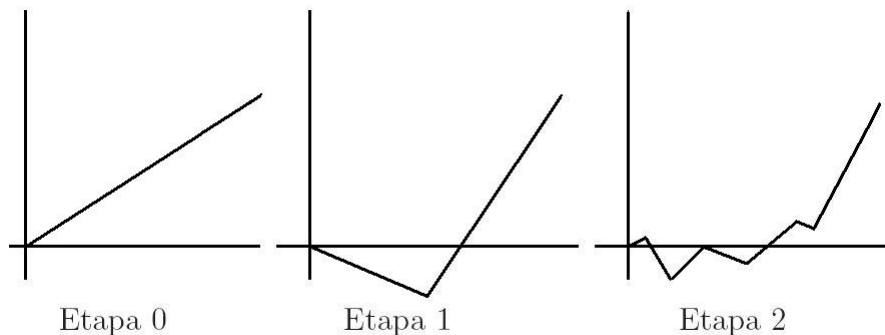


Figura 2: Processo inicial de construção da curva de Bolzano

2.2 Curva de Koch

A curva de Koch foi construída pela primeira vez pelo matemático sueco Helge Von Koch, em 1904. A construção da Curva de Koch inicia-se com uma reta, divide-se essa reta em três partes iguais e adiciona-se um triângulo equilátero com base no terço médio da mesma. O terço médio da reta dividida que serviu de base é então retirado, e o processo anteriormente iniciado com a divisão do triângulo equilátero sobre o terço médio da reta é repetido em cada novo segmento de reta formado. Repetindo esse processo indefinidamente em cada novo segmento formado obtém-se a curva de Koch, a qual tem comprimento infinito dentro de um plano finito e sua dimensão não é de uma reta e nem de um plano, mas intermediária a ambas, ou seja, é mais que unidimensional e menos que bidimensional. A Figura 3 mostra alguns passos dessa construção.

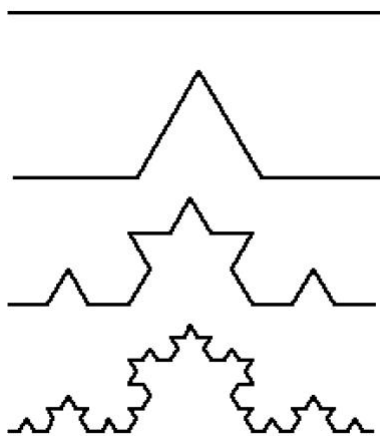


Figura 3: Processo inicial de construção da curva de Koch

2.3 Floco de neve de Koch

A curva de Koch deu origem ao Floco de neve de Koch cuja construção é semelhante a curva de Koch, a diferença é que inicia-se com um triângulo equilátero, ao meio de cada lado desse triângulo adiciona-se novos triângulos com um terço do tamanho do triângulo inicial, obtendo assim uma figura no formato de uma estrela. Em cada novo triângulo formado repete-se o processo indefinidamente, a Figura 4 mostra o início e algumas etapas desta construção.

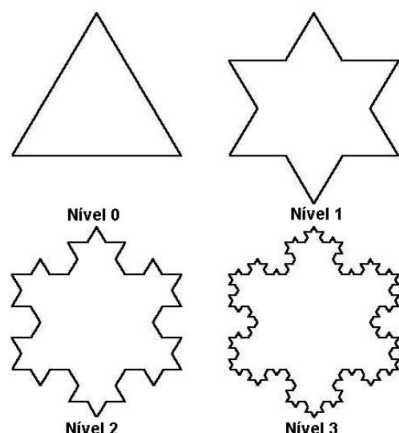


Figura 4: Início da construção do floco de neve de Koch

2.4 Triângulo de Sierpinski

A construção do triângulo de Sierpinski é similar ao Floco neve de Koch, a diferença é que ao invés de adicionar triângulos equiláteros ao perímetro, retira-se triângulo da área de cada novo triângulo formado. Inicia-se com um triângulo equilátero, inscreve-se outro triângulo com vértices no terço médio de cada lado do triângulo inicial, retira-se o triângulo inscrito formando assim três novos triângulos de mesmo tamanho. Repetindo esse mesmo processo indefinidamente nos novos triângulos formados obter-se-á um fractal com área zero, pelo fato de que em cada etapa uma parte dos triângulos formados anteriormente é retirada. A Figura 5 mostra algumas etapas do processo de construção.

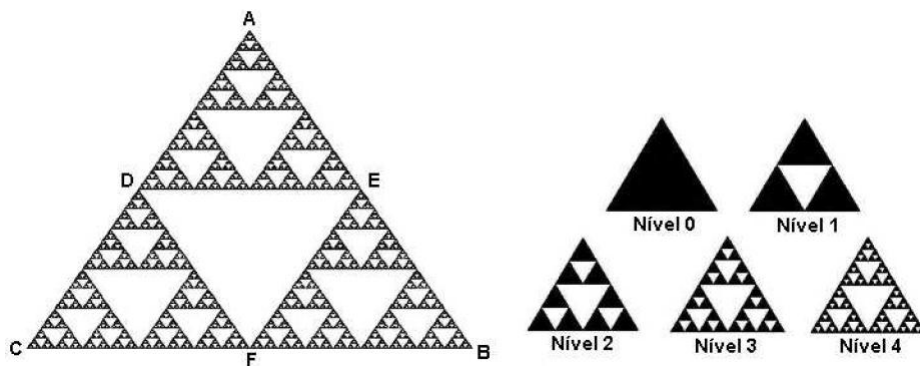


Figura 5: Início da construção do triângulo de Sierpinski

2.5 Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor foi criado pelo matemático George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, sua construção é por etapas e similar às citadas anteriormente. A construção do Conjunto de Cantor é feito da seguinte forma: primeiro divide-se o intervalo $I = [0, 1]$ em três partes iguais, formando três novos intervalos, e retira-se o intervalo central aberto, obtendo:

$$K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Na segunda etapa repete-se o mesmo processo com os dois novos intervalos fechados, divide-se cada um deles em três novos intervalos e retira-se os intervalos centrais abertos deixando apenas os quatro intervalos seguintes

$$K_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

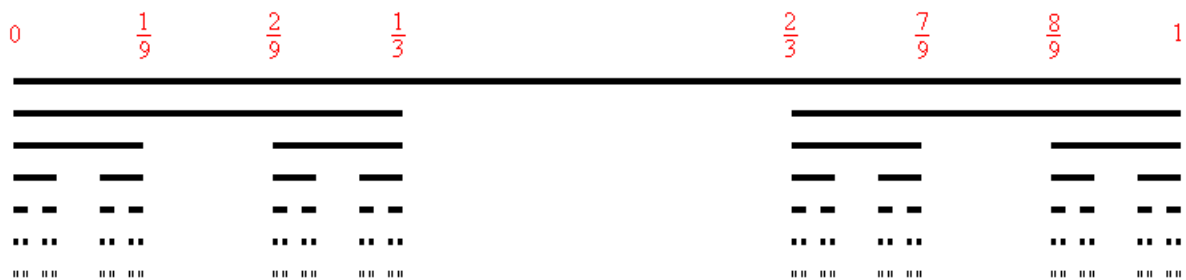


Figura 6: Algumas etapas da construção do conjunto de Cantor

Na terceira etapa divide-se novamente cada um dos quatro novos intervalos restantes da etapa dois em três partes e retira-se os intervalos centrais abertos deixando apenas os oito intervalos fechados

$$K_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

Sejam $n \in \mathbb{N}$ o número de etapas e K_n a união dos intervalos de cada uma das etapas de construção do conjunto de Cantor, a partir das etapas citadas anteriormente pode-se concluir que em cada uma das n etapas existe a união de 2^n intervalos formados pelo processo recursivo e cada K_n tem o dobro de intervalos, em relação a K_{n-1} . Seja K o conjunto de Cantor o qual é resultado do processo recursivo de eliminação do terço médio de cada um intervalo formados anteriormente a partir do intervalo $[0, 1]$, deste modo, verifica-se que em cada etapa os extremos dos intervalos formados não são eliminados, sendo assim, pode-se concluir que o conjunto de Cantor é formado por:

$$K = K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap \dots \cap K_n \cap \dots,$$

ou seja, somente os extremos de cada um dos intervalos formados fazem parte do conjunto de Cantor. Geometricamente a construção do Conjunto de Cantor é similar a Curva de Koch, ambas iniciam com um segmento de reta de comprimento igual a 1 e em cada etapa os segmentos são divididos em três partes iguais. A diferença entre ambos é que na curva de Koch o terço médio de cada segmento formado em cada etapa é substituído por um triângulo equilátero, já no conjunto de Cantor apenas é retirado o terço médio de cada segmento. Os segmentos de reta formados geometricamente pelo processo recursivo de construção do conjunto de Cantor tem 3^{-n} do comprimento do segmento inicial. Para saber qual é o comprimento dos segmentos formados em um número infinito de etapas basta calcular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

Isso significa que em um número infinito de passos não haverá mais segmentos de reta mas, apenas pontos, o que explica o termo “Poeira de Cantor” utilizado por alguns autores. Em cada passo do processo de construção do conjunto de Cantor temos 2^n segmentos. Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty,$$

assim conclui-se que quando o número de etapas tende ao infinito tem-se infinitos segmentos de reta. A Figura 6 mostra o início da construção do conjunto de Cantor.

2.6 Propriedades do Conjunto de Cantor

Definição 1. Um subconjunto X de espaço métrico M é dito limitado se existir $r \geq 0$ tal que $d(x, y) \leq r, \forall x, y \in X$.

Definição 2. Seja A um subconjunto de um espaço métrico M . Diz-se que A é aberto se todo ponto $x_0 \in A$ é centro de uma bola aberta inteiramente contida em A .

Definição 3. Seja F um subconjunto de um espaço métrico M . Diz-se que F é fechado se, seu complementar é aberto.

Proposição 4. O conjunto de Cantor é fechado.

Demonstração. Observa-se que K_n é a união de 2^n intervalos fechados. Assim K_n é um número finito de intervalos fechados, que é também fechado. Mas, $K = \bigcap \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$; logo, o conjunto de Cantor K é fechado, pois é a intersecção enumerável de intervalos fechados. \square

Definição 5. Seja C um subconjunto de um espaço métrico M . Diz-se que C é compacto se C é fechado e limitado.

Proposição 6. O conjunto de Cantor é Compacto.

Demonstração. Como K é um conjunto fechado e limitado, K é compacto. \square

3 Dimensão de Curvas e Regiões

Desde a antiguidade a Geometria Euclidiana tem servido para a descrição de diversas formas e diferentes fenômenos da natureza. Porém, quando em alguns estudos da Geometria Euclidiana deparou-se com o problema de calcular a dimensão de algumas formas irregulares como: nuvens, montanhas, ramos de árvores, vasos sanguíneos, entre outros, essa geometria tornou-se inadequada e surgiu a necessidade de buscar outras geometrias. Em meados do século XIX é que foi possível resolver este problema com o surgimento da Geometria fractal e, segundo a mesma, a dimensão de um objeto depende do seu formato e, em geral, representa o espaço que uma estrutura ocupa no espaço métrico em que está inserida. Para entender melhor o conceito de dimensão pode-se adotar alguns conceitos da Geometria Euclidiana (largura, comprimento e altura) que são diariamente utilizados para expressar o “tamanho” de um objeto. Um ponto não possui comprimento, altura e nem largura, portanto é adimensional; um reta possui apenas comprimento, logo é unidimensional; um plano possui comprimento e altura, ou seja tem duas dimensões, então é bidimensional; já um cubo tem altura largura e comprimento, portanto é tridimensional, como mostra na Figura 7.

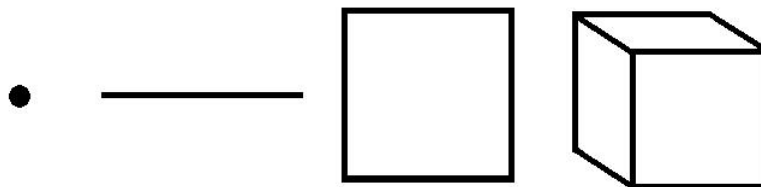


Figura 7: Algumas formas euclidianas

3.1 Dimensão de Hausdorff

O conceito de dimensão da Geometria Euclidiana está relacionado a conceitos de medida altura, largura e comprimento as quais estão relacionadas aos objetos ditos “perfeitos”, já na Geometria fractal os fractais apresentam forma irregular e dimensão fracionada, as curvas irregulares tem dimensão entre um e dois e as superfícies entre dois e três. Na Geometria fractal o conceito de dimensão está associado ao formato do objeto em questão que corresponde ao grau de irregularidade em diferentes escalas, aspereza e fragmentação, o que explica o fato de terem dimensão fracionária e serem objetos ditos “imperfeitos”. O método de calculo da dimensão de Hausdorff-Hesicovitch permite calcular a dimensão de objetos ditos “perfeitos” e dos fractais naturais que, com o aumento da escala, percebe-se que em seu interior existem partes que não são exatamente auto-semelhantes a todo o conjunto fractal. De maneira intuitiva, usando a geometria euclidiana, vamos fazer alguns exemplos até chegar a uma fórmula para se calcular a dimensão fractal. Toma-se uma reta de comprimento L e a divide em N

partes, Figura 8. Seja $n = 1, 2, 3, \dots$ e U o comprimento de cada segmento obtido pela divisão desta mesma reta. É possível observar que cada segmento de reta formada após a divisão tem comprimento $U = \frac{L}{N}$ do comprimento da reta inicial, logo $N = \frac{L}{U}$. Como já é sabido que a dimensão de uma reta é um, aplicando o logaritmo na equação dada tem-se:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}} = 1.$$



Figura 8: Retas divididas em $N = 1, 2, 3$ e 4 partes iguais.

Para um quadrado de lado L aplica-se o mesmo processo citado anteriormente, figura 9. Observa-se que para obter quadrados semelhantes ao inicialmente tomado, o lado de cada quadrado formado tem que ser $U = \frac{L}{\sqrt{N}}$, sendo assim $N = (\frac{L}{U})^2$. Sabe-se que quadrados são figuras bidimensionais. Assim, aplicando o logaritmo na equação anterior, tem-se:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}} = 2.$$

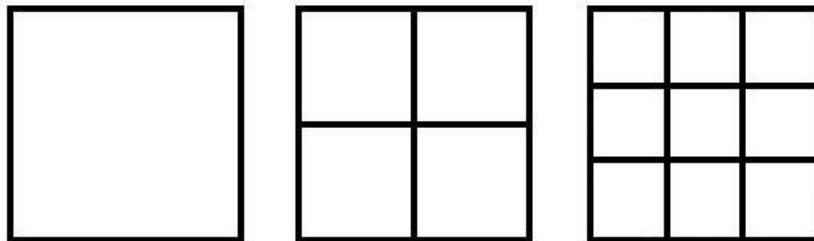


Figura 9: Quadrados divididos em N^2 partes iguais, com $N = 1, 2$ e 3.

Agora, tomado-se um cubo de lado L e o dividindo em N partes iguais, Figura 10, para que os cubos formados a partir da divisão sejam semelhantes ao tomado inicialmente o lado de cada um deles tem que ser $U = \frac{L}{\sqrt[3]{N}}$, isolando-se N na equação anterior tem-se que, $N = (\frac{L}{U})^3$. Um cubo é tridimensional não importa qual seja o tamanho de seus lados, logo,

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}} = 3.$$

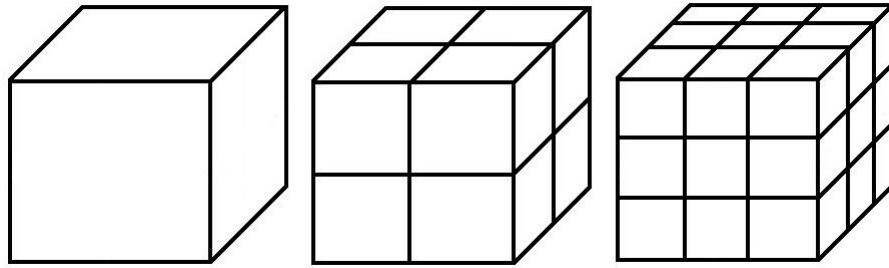


Figura 10: Cubos divididos em N^3 partes iguais, com $N = 1, 2$ e 3 .

Por meio do processo feito anteriormente pode-se concluir que $N = (\frac{L}{U})^D$, onde D é a dimensão de um conjunto C qualquer, incluindo os fractais. Assim, a dimensão de um fractal pode ser expressa através da fórmula

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}} \quad (1)$$

onde, D é a dimensão; N é o número de partes em cada etapa da divisão; L é o comprimento inicial (ou lado) do objeto ou figura a que foi dividido em N partes iguais e U é o comprimento de cada segmento obtido através da divisão.

3.2 Conjunto de Cantor

Na construção geométrica do conjunto de Cantor K também chamado de Poeira de Cantor, toma-se inicialmente um segmento de reta de comprimento $L = 1$, dividindo-o em três partes iguais eliminando o segmento central e, em cada segmento formado repete-se o mesmo processo indefinidamente. A Figura 6, apresentada anteriormente, traz algumas etapas da construção do conjunto de Cantor. De acordo com a Tabela 1 são formados $N = 2^n$ segmentos de reta em cada $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ etapa de construção de comprimento 3^{-n} . Aplicando a Fórmula 1, obtém-se:

$$D_K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log \frac{1}{3^{-n}}} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0.6309\dots$$

Tabela 1: A quantidade e o comprimento de cada segmento formados em cada etapa da construção do conjunto de Cantor.

Etapas	N	U
0	1	1
1	2	$\frac{1}{3}$
2	4	$\frac{1}{9}$
3	8	$\frac{1}{27}$
\vdots	\vdots	\vdots
n	2^n	3^{-n}

3.3 Curva de Koch

Na curva de Koch C , como no conjunto de Cantor inicialmente tomamos uma reta de tamanho $L = 1$, dividi-a em três partes iguais e a única diferença é que substitui-se o terço médio por dois novos segmentos de reta de comprimento igual aos dos que restaram, como mostra na Figura 3. Como mostra a Tabela 2 em cada uma das n etapas são formados $N = 4^n$ segmentos de comprimento $U = 3^{-n}$. Aplicando a fórmula 1, tem-se

$$D_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log \frac{1}{3^{-n}}} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1,2618\dots$$

Tabela 2: A quantidade e a medida de cada segmento formado em cada uma das etapas da construção da curva de Koch.

Etapas	N	U
0	1	1
1	4	$\frac{1}{3}$
2	16	$\frac{1}{9}$
3	64	$\frac{1}{27}$
\vdots	\vdots	\vdots
n	4^n	3^{-n}

3.4 Triângulo de Sierpinski

A construção do triângulo Sierpinski T inicia com um triângulo equilátero de lado $L = 1$, em cada etapa n de construção é inscrito um triângulo com vértices no terço médio de cada lado do triângulo formado na etapa anterior, como podemos ver na Figura 5. De acordo com a Tabela 3 em cada etapa tem-se $N = 3^n$ triângulos de lado $U = 2^{-n}$. Aplicando os estes

dados na Fórmula 1, tem-se:

$$D_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3^n}{\log \frac{1}{2^{-n}}} = \frac{\log 3}{\log 2} \cong 1,584\dots$$

Tabela 3: A quantidade e a medida do lado de cada um dos triângulos formados em cada uma das etapas de construção do triângulo de Sierpinski.

Etapas	N	U
0	1	1
1	3	$\frac{1}{2}$
2	9	$\frac{1}{4}$
3	27	$\frac{1}{8}$
⋮	⋮	⋮
n	3^n	2^{-n}

4 Método Box-Counting

O cálculo da dimensão pelo método box-counting expõem uma medida sistemática que pode ser aplicada a qualquer tipo de estrutura colocada facilmente sobre um plano com malha. O método box-counting consiste em se colocar uma estrutura sobre uma grade com malha de tamanho U e então conta-se o número de caixas da grade que contém parte da estrutura, isto dá um certo número N que depende do tamanho U , isto é, $N(U)$. Em seguida diminui-se o tamanho de U , o que conseqüentemente aumenta $N(U)$, e tende-se, novamente, esta malha a tamanhos cada vez menores de forma a se obter estruturas com tamanhos cada vez menores e conta-se novamente o número de estruturas $N(U)$ da grade. Posteriormente, para cada iterada n , constrói-se o gráfico no plano $\log(N(U)) \times \log(\frac{1}{U})$ e marcamos os pontos $(\log(N_n(U)); \log(\frac{1}{U_n}))$, $(\log(N_{n+1}(U)); \log(\frac{1}{U_{n+1}}))$, ... com $n = 0, 1, 2, \dots$, e encaixa-se uma linha reta nos pontos do diagrama. A medida da inclinação dessa da reta corresponde a dimensão box-counting da estrutura, que é denotada e dada por:

$$D_b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{n+1}(U)) - \log(N_n(U))}{\log(\frac{1}{U_{n+1}}) - \log(\frac{1}{U_n})} \quad (2)$$

Mais detalhes pode ser visto em (PEITGEN-1993, p. 202). A seguir vamos exemplificar esta fórmula calculando a dimensão dos seguintes fractais:

4.1 Tapete de Sierpinski

O tapete de Sierpinski que pode ser visto na Figura 11 e seus dados na Tabela 4, pode-se concluir que são necessário, para cobrir o tapete de Sierpinski, 8^n caixas cujo lados tem comprimento igual a 3^{-n} , logo tem-se que:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 8^{n+1} - \log 8^n}{\log 3^{n+1} - \log 3^n} = \frac{\log 8}{\log 3} \cong 1,892\dots$$

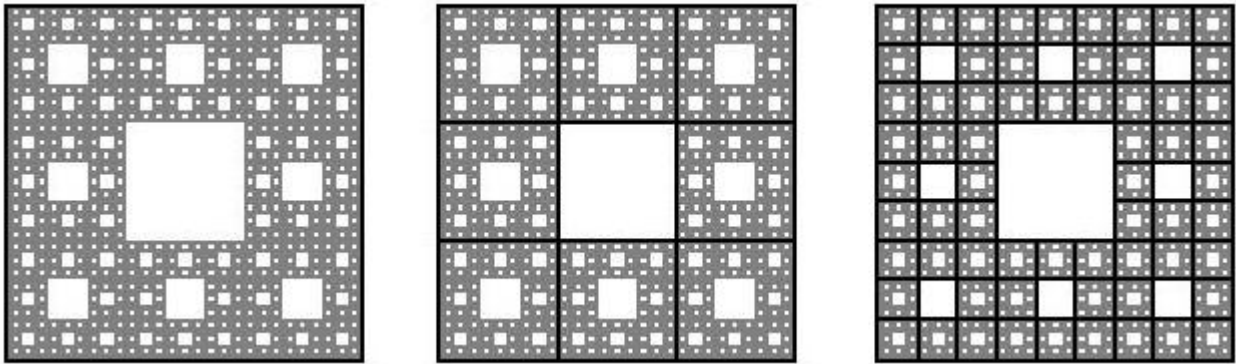


Figura 11: Algumas etapas do processo de encaixotamento do tapete de Sierpinski

Tabela 4: Tabela de algumas etapas de encaixotamento do tapete de Sierpinski.

Étapas	N	U
0	1	1
1	8	$\frac{1}{3}$
2	64	$\frac{1}{9}$
3	512	$\frac{1}{27}$
⋮	⋮	⋮
n	8^n	3^{-n}
⋮	⋮	⋮

4.2 Esponja de Menger

É também possível utilizar também a contagem de caixas para calcular a dimensão da esponja de Menger M , cuja construção é semelhante a do tapete de Sierpinski, a diferença é que a mesma é construída a partir de um cubo. A Figura 12 mostra algumas das etapas do encaixotamento da esponja de Menger.

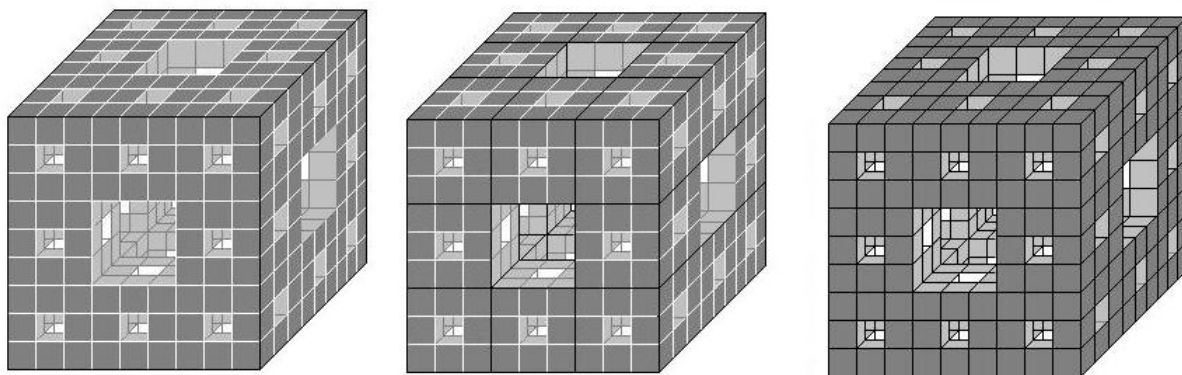


Figura 12: Etapas do processo de encaixotamento da esponja de Menger

Etapas	N	U
0	1	1
1	20	$\frac{1}{3}$
2	400	$\frac{1}{9}$
3	8000	$\frac{1}{27}$
⋮	⋮	⋮
n	20^n	3^{-n}
$n + 1$	20^{n+1}	$3^{-(n+1)}$
⋮	⋮	⋮

Tabela 5: Etapas do encaixotamento da esponja de Menger

A partir dos dados da Tabela 5, pode-se calcular a dimensão da esponja de Menger por meio do processo de encaixotamento. Quando uma determinada quantidade de caixas é dividida pelo inverso do comprimento do lado de cada caixa da mesma etapa do encaixotamento encontra-se a dimensão da esponja de Menger. Calculando,

$$D_M = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 20^{n+1} - \log 20^n}{\log 3^{n+1} - \log 3^n} = \frac{\log 20}{\log 3} \cong 2,726\dots$$

Conclusão

O artigo apresentou um pouco da história da geometria fractal e mostrou, de uma maneira não muito formal, duas maneiras de se medir a dimensão de uma fractal: dimensão de Hausdorff e a Box-Counting.

Percebe-se que o conceito de dimensão, na geometria euclidiana, está relacionada ao comprimento, altura e espessura de um objeto; na geometria fractal a dimensão refere-se ao

espaço que uma estrutura ocupa no espaço em que está imersa, isto é, a dimensão fractal é uma medida que quantifica a densidade dos fractais no espaço métrico em que são definidas e serve para compará-las. Assim, vimos que a dimensão dos objetos fractais é, em geral, fracionária enquanto que a dimensão dos objetos euclidianos é inteira

Existem várias categorias de fractais, porém neste presente artigo destacamos o estudo dos fractais que contém a característica de auto-similaridade, isto é, existem cópias exatas de si mesmo em diferentes escalas no seu interior. Daí, para os fractais expostos podemos usar qualquer um dos métodos de medir a dimensão: Hausdorff (equação 1) e a Box-Counting (equação 2).

Como pode ser visto em (VILELA-2003), (BACKES-2005), (LOURENÇO-2010), esses dois métodos de medir a dimensão fractal são bastante utilizados em aplicações nas várias áreas do conhecimento, como: medicina, computação, física, dentre outras.

Referências

- [HOLMGREN-1996] HOLMGREN, R. A., **A First Course in Discrete Dynamical Systems**. 2. ed. Springer, New York 1996.
- [PLAZA-2000] PLAZA, S., *Fractales y Generación Computacional de Imágenes.*, **Monografias Del IMCA** 16, 2000.
- [PEITGEN-1993] PEITGEN, H.; HARMUT, J.; SAUPE, D., **Chaos and Fractals: New Frontiers of Science**, Springer, New York, 1993.
- [BACKES-2005] BACKES, A.; BRUNO, O.M., Técnicas de Estimativa da Dimensão Fractal: Um Estudo Comparativo, **INFOCOMP Journal of Computer Science**, vol. 4, n^o 3, 2005, p. 50–58.
- [VILELA-2003] VILELA, M.J. et al. Determinação de padrões de crescimento de células em cultura, **Jornal Brasileiro de Patologia e Medicina Laboratorial**, vol. 39, n^o1, 2003.
- [LOURENÇO-2010] LOURENÇO, B.J.; DICKMAN, A.G., Fractais: uma proposta de ensino de física, XVIII Simpósio Nacional de Ensino de Física SNEF, 2009. Disponível em www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xviii/sys/resumos/T0603-1.pdf, data de acesso: 22 jul. 2010.