REMat
ISSN 2177-5095
nº2 - 2010
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

O USO DE NOVAS TECNOLOGIAS: UM CAMINHO PARA A CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS DE CÔNICAS

Sandra Aparecida de Oliveira Baccarin
Professora da FAJESU-DF
sandrabaccarin@gmail.com

Rogério César dos Santos
Professor da UnB - FUP
professorrogeriocesar@gmail.com

Resumo

Neste trabalho mostramos como esboçar os gráficos das principais cônicas com o uso da geometria dinâmica, permitindo, simultaneamente, a comprovação visual das propriedades que as conceituam. Usamos para tal fim o software livre WINGEOM, que pode ser encontrado em (WINGEOM-2010). Enfocaremos a parábola, a hipérbole e a elipse.

Palavras chaves: Geometria Dinâmica, Cônicas.

Abstract

We are concerned with drawing the graphics of the main conics using dynamic geometry and, at the same time, to get visual insights about its defining properties. We achieve our propose using the free software WINGEOM, which can be found at (WINGEOM-2010). We deal with the parabola, the hyperbola and the ellipse.
Keywords: Dynamic geometry, conics.

1 Introdução

Como despertar em nossos alunos um maior interesse pelas aulas de Matemática? O uso de novas tecnologias pode ser um dos caminhos?

No ensino-aprendizagem da geometria analítica é comum a abordagem do processo de construir as cônicas a fim de se visualizar o gráfico das mesmas no plano cartesiano. A elipse, por exemplo, é construída da seguinte forma: num plano, fixam-se dois percevejos em cada um dos pontos distintos F_1 e F_2, chamados de focos; um barbante de tamanho maior do que $d(F_1, F_2)$é amarrado, pelas pontas, nos dois focos; fazendo girar o barbante com um lápis fixo no plano, de modo a esticar todo o barbante, obteremos a curva desejada.

No presente artigo, desejamos dar uma idéia de como é possível conciliar a Matemática ao uso de novas tecnologias contruindo a parábola, a elipse e a hipérbole por meio de um software matemático gratuito, chamado Wingeom, da mesma linha do software gráfico Winplot. O intuito é ajudar os alunos *a descobrirem por sua própria ação as principais propriedades das cônicas.*

2 A parábola

A parábola é definida como sendo o conjunto dos pontos do plano eqüidistantes de um ponto fixo F e de uma reta fixa d, sendo F fora de d. O ponto F será o foco e d a reta diretriz da parábola. Demonstra-se, em (BUCHHI-1998), que se F possuir coordenadas $(0, p)$ e a reta diretriz tiver equação $y = -p$, então a equação da parábola será $y = \dfrac{x^2}{4p}$. Por simplicidade, vamos construir a parábola tal que $p = 2$, $F = (0, 2)$ e $d : y = -2$. Tal parábola possui equação $y = \dfrac{x^2}{8}$. Todo o processo de construção está descrito abaixo, juntamente com os comandos do software:

2.1 Criando e visualizando a parábola

a) Clicar em *Janela* e *2-dim...*

b) Clicar em *Ponto* e *Coordenadas*.

c) Digitar # para x, #^2/8 para y e clicar em *marcar*.

d) Clicar em *Anim*, e *Traço Temporário...*, digitar *a* e clique *ok*. Este comando permite visualizar os lugares por onde o ponto criado irá percorrer.

e) Clicar em *Anim* e *Variação de #*.

f) Fazer com que os valores da caixa de diálogo variem com a barra de rolagem.

g) Digitar -4 na caixa de diálogo *valor corrente de #* e clicar *fixar E*, depois digitar 4 e clicar *fixar D*. Desta forma, os valores de # poderão variar entre -4 e 4. Fazendo # variar novamente, observe que o ponto desaparece quando # é negativo. Para suprir esta carência, crie o ponto (−#, #^2/8), seguindo os passos b) e c). [1]

h) Clicar em *Anim*, e *Traço Temporário...*, digitar *ab* e clicar *ok*. Este comando permite visualizar os lugares por onde os pontos A e B irão percorrer.

i) Faça # variar entre 0 e 4 e observe o desenho que a parábola faz na figura 1!

Nos passos 2, 3, 4 e 5 seguintes, pretendemos fazer com que os alunos descubram a principal propriedade das parábolas:

[1] Deixe # positivo para que este ponto possa ser construído.

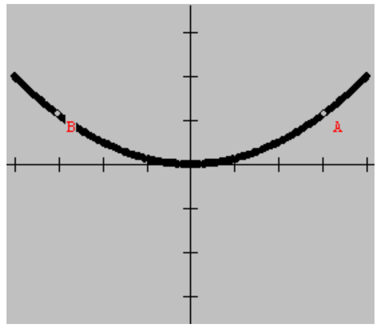

Figura 1: Traçando a parábola

Propriedade p: a distância de um ponto qualquer P da parábola até a reta diretriz é a mesma de P até o foco.

2.2 Criando a reta diretriz d:

Criaremos dois pontos C e D para depois criamos a reta determinada por eles.

a) Clicar em *Ponto* e *Coordenadas...*

b) Digitar -4 para x e -2 para y.

c) Clicar em *marcar.*

d) Pelo mesmo método, criar o ponto $(x = 4, y = -2)$.

e) Clicar em *Reta* e *Retas.*

f) Digitar *cd* na caixa de diálogos, e clicar em *ok.*

2.3 Criando o foco $F = (0, 2)$

a) Clicar *Ponto* e *Coordenadas.*

b) Digitar 0 para x e 2 para y, e clicar em *marcar.*

2.4 Criando as projeções ortogonais de $A = \left(\#, \dfrac{\#^2}{8}\right)$ e $B = \left(-\#, \dfrac{\#^2}{8}\right)$ sobre a reta diretriz

a) Clicar *Ponto* e *Coordenadas.*

b) Digitar # para x e -2 para y, e clicar em *marcar.*

c) Digitar $-$# para x e -2 para y, e clicar em *marcar.*

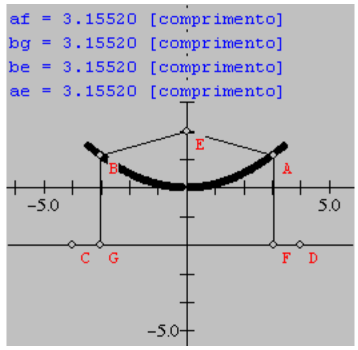

Figura 2: Verificando a propriedade principal da parábola

2.5 Verificando a propriedade p

a) Clicar em *Medidas.*

b) Digite *af* e aperte Enter, depois digite *bg* e aperte Enter, assim como *be* e *ae.*

c) Faça # variar entre 0 e 4 e verifique se os valores são sempre os mesmos.

d) Para visualizar melhor as distâncias, clique *Reta*, *segmentos* e digite *af*, *ae*, *bg*, *be.*

e) Faça # variar entre 0 e 4. Observe na figura 2 o resultado destas operações.

3 A hipérbole

Reinicie o software clicando em *Arquivo* e *Novo*. Como exemplo, vamos criar a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, que possui os seguintes elementos: vértices $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, e focos $A = (\sqrt{2}, 0)$ e $B = (-\sqrt{2}, 0)$. Da equação $x^2 - y^2 = 1$, concluímos que um ponto qualquer da hipérbole $(x, \pm\sqrt{x^2 - 1})$ pode ser inserido no Wingeom com as coordenadas

$$\begin{aligned} C &= (\#, (\#\hat{\ }2 - 1)\hat{\ }(1/2)), \\ D &= (\#, -(\#\hat{\ }2 - 1)\hat{\ }(1/2)), \\ E &= (-\#, (\#\hat{\ }\text{2-1})\hat{\ }(1/2)), \\ F &= (-\#, -(\#\hat{\ }\text{2-1})\hat{\ }(1/2)). \end{aligned}$$

Inseridos os focos A e B e os pontos C, D, E e F basta verificar as medidas AC, AD, BC, BD, AE, AF, BE e BF e, fazendo com que os valores de # variem entre 1 e 4, não esquecendo de atribuir o Traço Temporário aos pontos C, D, E e F.

Agora, é só observar o traço desenhado e também a principal propriedade das hipérboles: dado X (que pode ser C, D, E ou F) um ponto qualquer da hipérbole, o módulo da diferença

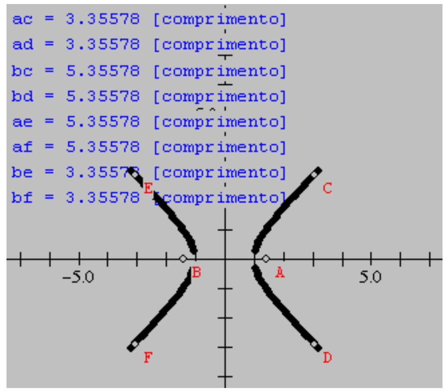

Figura 3: A hipérbole

$d(X, A) - d(X, B)$ é uma constante positiva igual a $2a$, onde $2a$ é a distância entre os dois vértices, que, no nosso caso, é igual a 2.

Existe também uma alternativa: clique *Medidas* e digite, por exemplo, $cb - ca$, ou então $ca - cb$. O resultado será igual a 2 ou -2, respectivamente. Observe a figura 3.

4 A elipse

Reinicie o software clicando em *Arquivo* e *Novo*. Como exemplo, vamos criar a elipse $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, que possui focos $A = (2\sqrt{2}, 0)$ e $B = (-2\sqrt{2}, 0)$. Da equação da elipse, concluímos que um ponto qualquer de seu gráfico $\left(x, \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\right)$ pode ser inserido no Wingeom com as coordenadas

$$
\begin{aligned}
C &= (\#, (1 - \#\hat{}2/9)\hat{}(1/2)),\\
D &= (\#, -(1 - \#\hat{}2/9)\hat{}(1/2)),\\
E &= (-\#, (1 - \#\hat{}2/9)\hat{}(1/2)),\\
F &= (-\#, -(1 - \#\hat{}2/9)\hat{}(1/2)).
\end{aligned}
$$

Inseridos os focos A e B e os pontos C, D, E e F basta clicar *Medidas* e digitar, por exemplo, $ac + cb$, ou então $ad + db$. Meça também ac, cb, ad e db. O resultado será igual a $2a = 6$, que é a medida do eixo maior, à medida que $\#$ varia entre 0 e 3. Quando for animar, lembre de atribuir o Traço Temporário aos pontos C, D, E e F. Para melhor visualização, crie também os segmentos BE e EA, por exemplo. A soma de seus comprimentos também é 6. A figura segue abaixo:

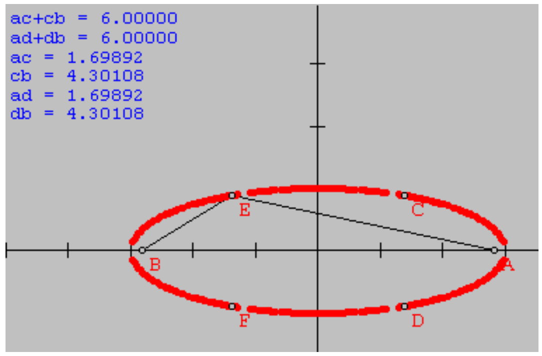

Figura 4: A Elipse

5 Conclusão

A realização dessas atividades permite que os alunos visualizem a construção, e assim comprovem as propriedades que conceituam as cônicas. O aprendizado, desta forma, se torna motivador e duradouro.

Referências

[WINGEOM-2010] Site do aplicativo WINGEOM, disponível em http://math.exeter.edu/rparris/wingeom.html (acesso no dia 15 de julho de 2010).

[BUCHHI-1998] BUCHHI, P. **Curso Prático de Matemática 3**, 1 ed. Editora Moderna, São Paulo, 1998 .