REMat
ISSN 2177-5095
nº2 - 2010
REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA
www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica
contato: remat.ufg@gmail.com

Quando a altura coincide com a idade?

Wescley Well Vicente Bezerra
Professor da Faculdade UnB - Planaltina
wescley.well@gmail.com

Rogério César dos Santos
Professor da Faculdade UnB - Planaltina
professorrogeriocesar@gmail.com

Resumo

Nesse artigo, os autores discutem uma maneira de como encontrar a data em que a altura de uma pessoa coincide com a sua idade. Para responder a essa questão, é utilizado um exemplo real dos dados do crescimento de uma criança. Além disso, o Teorema do Valor Intermediário é usado para garantir a existência de uma solução. Por fim, é feito o uso de uma reta de regressão linear, o método dos mínimos quadrados e o cálculo do vértice de uma parábola para solucionar o problema de duas maneiras diferentes.

Palavras chaves: Teorema do Valor Intermediário, Reta de Regressão Linear, Método dos Mínimos Quadrados e Vértice de uma Parábola.

When does the height coincides with age?

Abstract

Keywords: Intermediate Value Theorem, the Linear Regression Line, Method of Least Squares and Vertex of a Parabola.

In this article, the authors discuss a way how to find the date on which the height of a person matches their age. To answer this question, you use a real example of data from a child's growth. In addition, the Intermediate Value Theorem is used to guarantee the existence of a solution. Finally, it is done using a linear regression line, the method of least squares and the calculation of the vertex of a parabola to solve the problem in two different ways.

Em que data a sua altura em centímetros coincidiu com sua idade em dias, se é que houve tal data? A solução desse problema consiste na eficiente aplicação de funções do segundo grau.

Primeiramente vamos provar que houve essa data. Para tanto, lembremos do **Teorema do Valor Intermediário** demonstrado em (FIGUEIREDO-1996): dada uma função contínua f definida em $[a, b]$, com $f(b) > f(a)$, então qualquer valor d do intervalo aberto $(f(a), f(b))$ é imagem de algum ponto c do intervalo aberto (a, b).

Vamos analisar a questão com um exemplo real. O filho do segundo autor atingiu as seguintes alturas, para os primeiros dias de vida, segundo o seu pediatra ($x_1 = 0$ representa o momento de seu nascimento):

Tabela 1: Idade$\times$altura

Dias - (x_i)	Altura (cm) - (y_i)
0	50
7	49,5
15	50,5
34	53
65	56
102	61,5
135	64

Defina g como sendo a altura em cm e x a idade em dias a partir do nascimento. É claro que a altura g é função contínua de x. Considere a função $f(x) = x - g(x)$, também contínua. Pela tabela 1, $f(0) = -50$ e $f(135) = 135 - 64 = 71$. Tome $d = 0$. Então, pelo teorema do valor intermediário, existe um ponto c no intervalo aberto $(0, 135)$ para o qual $f(c) = 0$, isto é, um dia c tal que $g(c) = c$. Está provada a existência de um dia no qual a idade em dias coincidiu com a altura em centímetros. Vamos agora encontrar um valor aproximado para c. Assim sendo, plotando os dados num gráfico, observamos que os pontos descrevem aproximadamente uma reta:

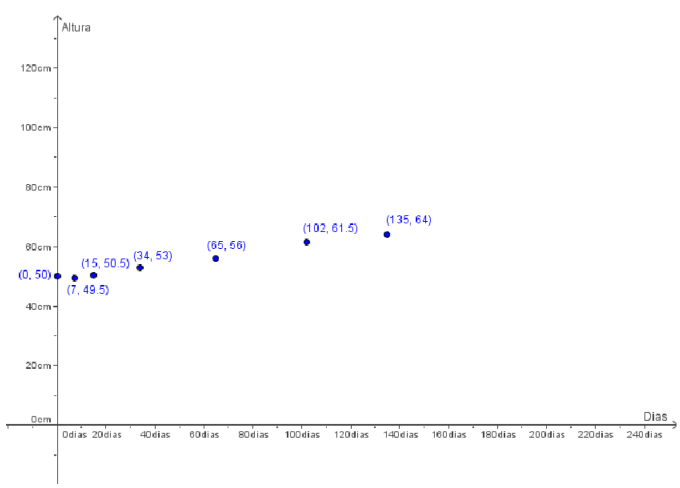


Gráfico 1

Mas qual seria a equação da reta que melhor aproxima os pares ordenados acima observados?

Definição 1. Por diferença vertical entre um par ordenado (x_i, y_i) e uma reta $y = b_0 + b_1x$, entende-se como sendo o valor $y_i - (b_0 + b_1x_i)$.

Mas a soma das diferenças verticais entre os pontos da tabela 1 e uma reta qualquer pode ser nula, já que algumas diferenças poderão ser negativas e outras positivas. Para evitar esse problema, estaremos interessados em descobrir a equação $y = b_0 + b_1x$ de uma reta que possua a seguinte propriedade: a soma dos quadrados das diferenças verticais entre cada par ordenado (x_i, y_i) da tabela 1 e a reta $y = b_0 + b_1x$ é a menor possível, dentre todas as demais retas. Essa reta é chamada de Reta de Regressão Linear (para entender melhor esse conceito veja (MARTINS-2006)).

Queremos, portanto, encontrar os valores b_0 e b_1 que minimizem a função $h'(b_0, b_1) = \sum_{n=1}^{7}(y_n - b_0 - b_1x_n)^2$, onde b_0 e b_1 são números reais. No entanto podemos perceber pelo gráfico 1 que o ponto $(0, 50)$ não segue o comportamento dos demais pontos. Isso ocorre porque, quando o bebê nasce (dia 0), ele está um pouco inchado por causa do acúmulo de água em seu corpo.

Ignoremos o ponto $(0, 50)$, portanto, e definamos a função $q(b_0, b_1) = \sum_{n=2}^{7}(y_n - b_0 - b_1x_n)^2$. Para encontrar o ponto (b_0, b_1) que minimiza q, seriam necessários os recursos do cálculo diferencial de duas variáveis, isto é: teríamos de encontrar a solução do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial b_0} & = 0 \\ \dfrac{\partial q}{\partial b_1} & = 0 \end{cases}$$

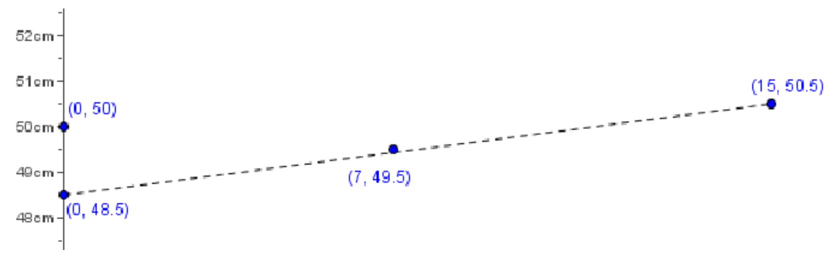
Resolvendo esse sistema, chegaríamos aos seguintes valores de b_0 e b_1:

$$b_1 = \frac{6\sum_{n=1}^{6} x_n \cdot y_n - \sum_{n=1}^{6} x_n \cdot \sum_{n=1}^{6} y_n}{6\sum_{n=1}^{6} x_n^2 - \left(\sum_{n=1}^{6} x_n\right)^2}, \quad b_0 = \frac{\sum_{n=1}^{6} x_n^2 \cdot \sum_{n=1}^{6} y_n - \sum_{n=1}^{6} x_n \cdot \sum_{n=1}^{6} x_n y_n}{6\sum_{n=1}^{6} x_n^2 - \left(\sum_{n=1}^{6} x_n\right)^2}$$

Essas fórmulas são chamadas fórmulas do Método dos Mínimos Quadrados (esse método é discutido em (MARTINS-2006)) . Resolvendo, $b_0 = 48,223...$ e $b_1 = 0,116108$.

Mas vamos tentar resolver de uma maneira que esteja ao alcance de nossos alunos do ensino médio.

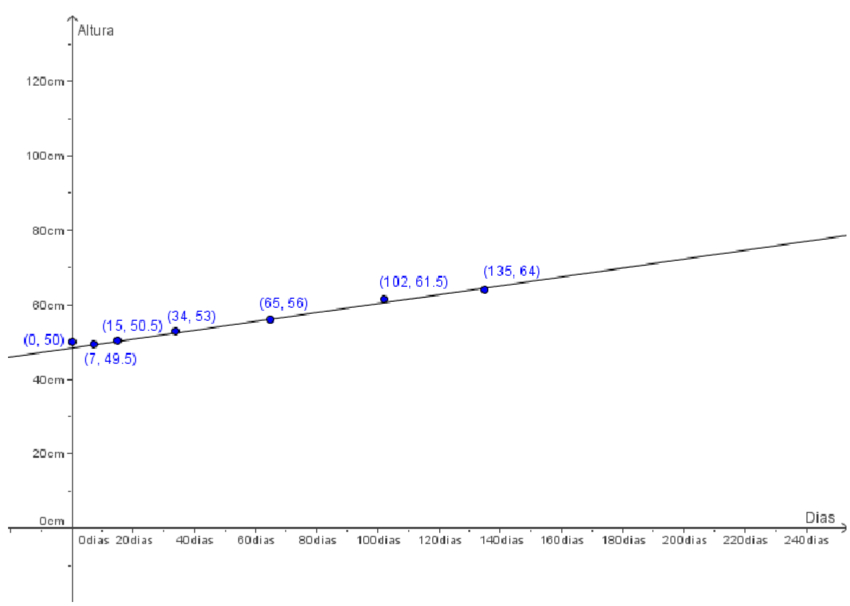
Dando um close no gráfico, podemos intuir que nossa reta deveria tocar o eixo y na altura aproximada $48,5$:



Vamos supor, portanto, que o coeficiente linear b_0 seja $48,5$. Dessa forma, precisaremos encontrar o valor de b_1 que minimize a seguinte função (já substituindo os x_i e os y_i da tabela 1 e excluindo o ponto $(0,50)$):

$$h(b_1) = (49,5 - 48,5 - 7b_1)^2 + (50,5 - 48,5 - 15b_1)^2 + \cdots + (64 - 48,5 - 135b_1)^2$$

Desenvolvendo à direita obtemos $h(b_1) = 34284b_1^2 - 8192b_1 + 490,75$, e esta função possui mínimo em $b_1 = 0,1195$, aproximadamente. Assim, a reta $y = b_0 + b_1x$ que melhor se ajusta aos dados da tabela 1 é dada pela equação $y = 48,5 + 0,1195x$. Seu gráfico está esboçado abaixo, juntamente com os sete pontos da tabela 1:



Como estamos interessados em qual dia x a altura y se igualou a x, basta resolver a equação $48,5 + 0,1195x = x$. O resultado é $x = 55,08$.

Como o filho do autor nasceu em 4 de dezembro, provavelmente 55 dias depois, isto é, em 28 de janeiro, a sua idade em dias coincidiu com sua altura em centímetros: a criança estava com 55 dias e com 55 centímetros.

Nota 1: *Se incluirmos o ponto estranho* $(0,50)$ *e calcularmos o mínimo da função de duas variáveis h', encontraríamos* $b_0 = 49,18332$*,* $b_1 = 0,112337$ *e, portanto,* $x = 55,41$*. Esse é um valor muito próximo ao encontrado.*

Nota 2: *Obviamente não podemos supor que a altura em centímetros e a idade em dias estejam sempre aproximadas por uma reta. Isso só é verdadeiro nos primeiros meses de vida.*

Nota 3: *A questão da existência do dia foi tirada de um problema proposto em* (HOFFMANN-2002). *O que fizemos foi, além de provar a existência, mostrar qual é o dia coincidente.*

Referências

[FIGUEIREDO-1996] FIGUEIREDO, D.G. **Análise 1.** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[MARTINS-2006] MARTINS, Gilberto de Andrade. **Estatística Geral e Aplicada.** 3 ed. São Paulo: Atlas, 2006.

[HOFFMANN-2002] HOFFMANN, L.D.; BRADLEY, G.L., **Cálculo - Um Curso Moderno e Suas Aplicações.** 7 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.