Duas Comprovações do Teorema de Pitágoras com Geometria Dinâmica

José Carlos de Souza Júnior[1] , Andréa Cardoso[2] e Thayze D'Martin Costa[3]

Resumo

O uso de programas computacionais, especialmente aqueles referentes à Geometria Dinâmica, permite a investigação de propriedades geométricas que dificilmente seriam observadas sem tais recursos. O software GeoGebra de Geometria Dinâmica associado a técnicas de desenho geométrico foram usados neste estudo para construir peças, semelhantes às de um quebra-cabeça, a fim de obter figuras geométricas de áreas equivalentes. Foi possível aplicar esta idéia para visualizar duas demonstrações do Teorema de Pitágoras e, também, mostrar os resultados usando conceitos desenvolvidos e observados na atividade computacional. Embora a Geometria Dinâmica seja um aliado no ensino de matemática, a mera visualização de um resultado não substitui a importância da demonstração formal do teorema uma vez que ilusões de óticas são criadas facilmente, o que é mostrado em uma das atividades desenvolvidas.

Palavras-chave: Geometria Dinâmica. Ensino de Matemática. Geometria.

Two Verifications of Pythagorean Theorem with Dynamic Geometry

Abstract

The use of computational programs, mainly those concerning Dynamic Geometry, allows one to easily investigate geometric properties which would hardly be observed without such resources. The Dynamic Geometry GeoGebra software, associated to geometry drawing techniques were used in this study to build pieces, similar to those of a puzzle, in order to obtain geometric figures of equivalent areas. It was possible to apply this idea to visualize two proofs of the Pythagorean Theorem and, also, to show the results by using concepts developed and observed in the computational activity. Though Dynamic Geometry is a powerful aid in Mathematics teaching, the mere visualization of a result does not replace the importance of the formal proof of the theorem once optical illusions are easily created, which is shown in one of the developed activities.

Keywords: Dynamic Geometry. Mathematics Teaching. Geometry.

(1) Doutor em Matemática, Universidade Federal de Alfenas/UNIFAL-MG, Departamento de Ciências Exatas, Rua Gabriel Monteiro da Silva, 714 – Alfenas/MG. jcsouza@unifal-mg.edu.br
(2) Doutor em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Alfenas/UNIFAL-MG, Departamento de Ciências Exatas, Rua Gabriel Monteiro da Silva, 714 – Alfenas/MG. andreac74@uol.com.br
(3) Graduanda em Matemática, bolsista de Iniciação Científica financiada pela FAPEMIG

Introdução

O desempenho dos estudantes em exames que avaliam suas habilidades em Matemática atesta que a aquisição do conhecimento matemático vem se tornando uma atividade cada vez menos produtiva. Talvez seja este o resultado mais evidente de uma visão restrita e vetusta do ensino da matemática como a ciência das quantidades e dos cálculos. Atualmente, com a disseminação de calculadoras e computadores, a Matemática não pode ser concebida como um instrumental técnico, mas sim de maneira mais ampla como uma forma de pensar, questionar, coordenar idéias e compreender o mundo.

Faz-se necessário o desenvolvimento de metodologias alternativas para o ensino de Matemática, tendo-se como principal referência, uma escola mais voltada para a aprendizagem que para o ensino, na qual a função específica do professor não seja instruir, mas motivar e mobilizar os aprendizes para que descubram por si próprios. A utilização de recursos computacionais pode se tornar um poderoso aliado para a necessária mudança de conceitos ultrapassados e abrir possibilidades para uma visão inovadora de ensino e aprendizagem baseada na perspectiva construtivista, através da exploração intuitiva de conceitos matemáticos, estimulando o gosto pelo aprender e fazer Matemática.

Especificamente, os Programas de Geometria Dinâmica permitem fazer construções geométricas rápidas e precisas além de permitir a manipulação dos objetos construídos preservando as características inerentes definidas em sua construção. Estes tipos de programas podem ser completamente definidos por um conjunto de objetos elementares (pontos, retas, segmentos e circunferências) e ações elementares (construir, desenhar, medir, girar, refletir, transladar, movimentar) essencialmente baseados na geometria euclidiana. As construções podem ser manipuladas com certo grau de liberdade, dependendo do vínculo estabelecido pela própria construção. Este tipo de ambiente computacional foi projetado de forma a fazer com que a manipulação das figuras carregue consigo as propriedades geométricas de sua construção, ou seja, somente uma construção bem feita no sentido geométrico irá manter suas propriedades geométricas iniciais, ou invariantes, após manipulação de quaisquer de seus elementos. Sendo assim é possível a percepção de padrões e invariâncias, levando o aprendiz a fazer conjecturas e testá-las.

Neste trabalho, o programa computacional de Geometria Dinâmica GeoGebra foi utilizado para o desenvolvimento das atividades. O GeoGebra é um *software livre* desenvolvido pelo professor Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgo que reúne geometria, álgebra e cálculo, é um sistema que permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas e funções que podem ser modificados dinamicamente. Por outro lado, pode-se também inserir equações e coordenadas diretamente através da janela de comandos. Assim, o GeoGebra pode trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos e permite determinar derivadas e integrais de funções, além de oferecer um conjunto de comandos próprios da análise matemática, para identificar pontos singulares de uma função, como raízes e extremos. Qualquer pessoa pode obter este forte aliado do ensino de Matemática através do seguinte endereço eletrônico: http://www.geogebra.org/cms/

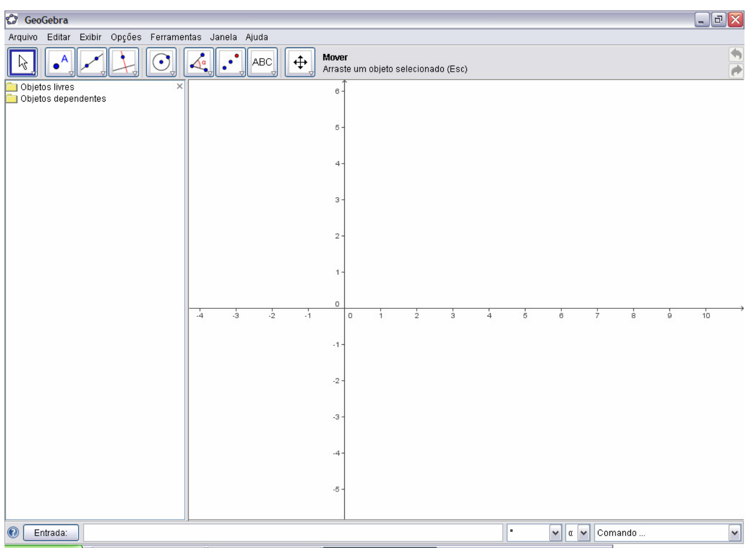


Figura 1: Tela inicial do GeoGebra

As atividades propostas trabalham o conceito de equivalência de área entre figuras planas, visto que tal idéia é a base do raciocínio utilizado em algumas das clássicas demonstrações do Teorema de Pitágoras e evidenciam a utilidade da utilização de programas de Geometria Dinâmica no processo de ensino e aprendizagem de Matemática básica.

Para futuras referências a figura 2 apresenta o menu do Windows e a barra de ferramentas do GeoGebra, onde cada um dos nove ícones, contém opções de construção que serão utilizadas na elaboração do roteiro das atividades e referenciadas como janela 1, janela 2, ..., janela 9, considerando-se a ordem que aparecem.

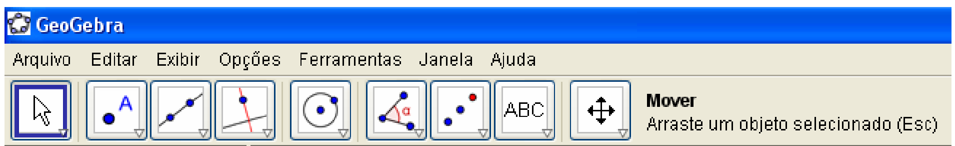


Figura 2: Barra de ferramentas do GeoGebra

Visualizando o Teorema de Pitágoras

O objetivo da atividade é visualizar e demonstrar o teorema de Pitágoras através da construção de um quebra-cabeça composto por cinco peças a saber: quatro triângulos retângulos congruentes de catetos *a* e *b* e hipotenusa *c*. Montar com estas peças, utilizando movimentos de rotação e translação, um quadrado maior de lado igual a soma dos catetos, para concluir o resultado. Os passos de 1 a 13 são dedicados à construção de um triângulo retângulo de catetos pré-definidos.

Roteiro de Construção:

Passo 1: No menu do **Exibir,** selecione a opção **Malha** e desabilite as opções **Eixo** e **Janela de álgebra**.

Passo 2: Clique na janela 3, selecione a opção **Segmento definido por dois pontos** e construa um segmento. Em seguida, digite a letra **a**, o GeoGebra irá rotular o segmento criado com o nome **a.** Repita este procedimento e crie outro segmento com o nome de **b.** Os segmentos criados podem ter medidas quaisquer. (Sugestão: Use os pontos da malha para facilitar a construção)

Passo 3: Selecione a opção **Círculo dados centro e raio** (janela 5), clique sobre um ponto qualquer da malha (centro da circunferência) e o GeoGebra irá pedir para que você forneça o raio, basta digitar a letra correspondente a um dos segmentos que foram nomeados pelo programa, por exemplo, digite **a**.

Passo 5: Clique na janela 1, selecione o **ponteiro**, clique sobre o centro da circunferência e em seguida, digite a letra **O**, nomeando assim, este ponto.

Passo 6: Clique na janela 3, selecione a opção **Segmento definido por dois pontos** e construa um segmento ligando o ponto **O** até um ponto da circunferência, que chamaremos de **A**.

Passo 7: Clique com o botão direito do mouse sobre o centro da circunferência e selecione a opção **Propriedades**, em seguida escolha a janela **cor** e mude a cor do ponto para vermelho através da paleta de cores.

Passo 8: Clique na janela 4, selecione a opção **Reta perpendicular**, clique sobre o ponto A e em seguida sobre o segmento $\overline{OA}$. Construímos assim, uma reta perpendicular ao segmento $\overline{OA}$ passando pelo ponto A.

Passo 9: Usando a opção **Círculo dados centro e raio** (janela 5), construa uma circunferência com centro A e raio b.

Passo 10: Clique na janela 2, selecione a opção **Interseção de dois objetos** e clique sobre o círculo do passo 9 e sobre a reta perpendicular do passo 8. Encontraremos dois pontos na interseção destes objetos, escolha um deles, clique com o botão direito do mouse sobre o mesmo, escolha a opção **Renomear** e altere o nome do ponto para B.

Passo 11: Clique na janela 3, selecione a opção **Polígono** e clique em seqüência sobre os pontos O (ponto inicial), A, B e novamente no ponto O (ponto final). Assim, cria-se um triângulo retângulo cujos catetos possuem medidas *a* e *b*.

Passo 12: Esconda todas as construções auxiliares, inclusive o ponto B, para isto, clique sobre as figuras com o botão direito do mouse e desabilite a opção **exibir objeto**. Deixe apenas o polígono visível.

Passo 13: Use o ponto A para rotacionar o triângulo e o ponto O para transladá-lo.

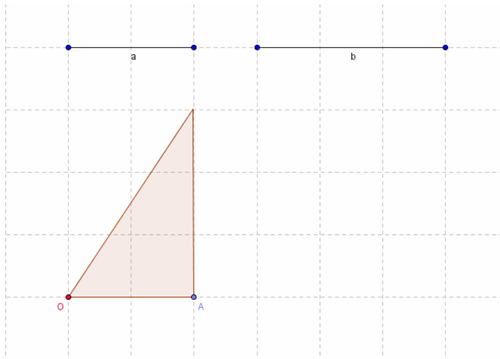


Figura 3: Triângulo retângulo de catetos a e b criado com o GeoGebra

Passo 14: Repita o procedimento de modo a obter ao todo, quatro triângulos retângulos idênticos (catetos *a* e *b*).

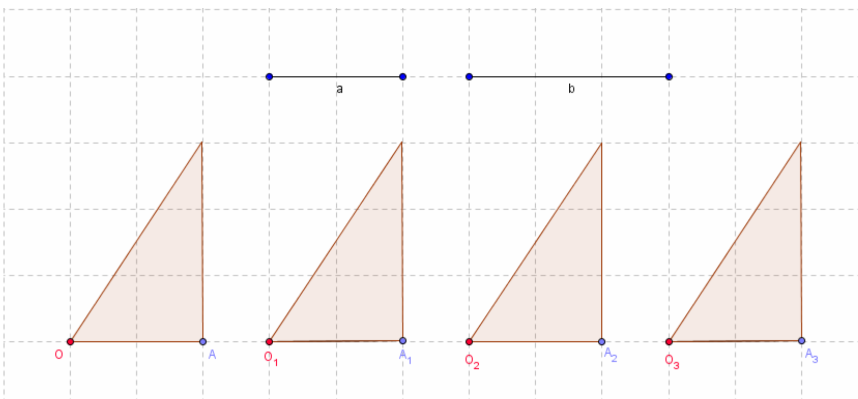


Figura 4: Triângulos retângulos congruentes criados com o GeoGebra

Passo 15: Com o botão direito do mouse, clique sobre a hipotenusa de um dos triângulos, selecione a opção **Renomear** e chame-a de ***c***.

Passo 16: Utilizando as opções **Círculo dados centro e raio** (janela 5) e **Reta perpendicular** (janela 4), construa um quadrado cujo lado tem medida *c*, obtendo a figura 5.

Passo 17: Movimentando os triângulos de modo a encaixar as hipotenusas nos lados do quadrado obtém-se figura 6.

Desta forma, obtemos um quadrado de lado *(a+b)* e cuja área é

$$A = (a+b)^2$$

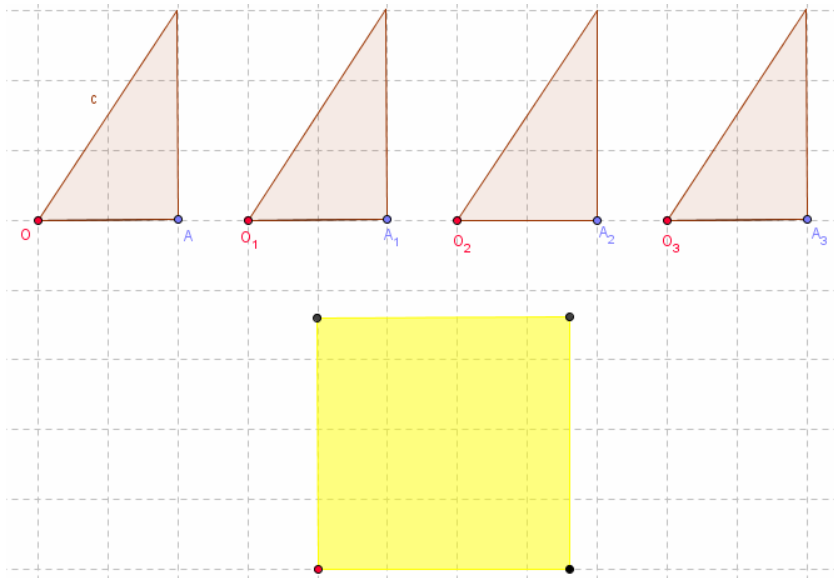


Figura 5: Construção de quadrado de lado igual à hipotenusa do triângulo utilizando GeoGebra

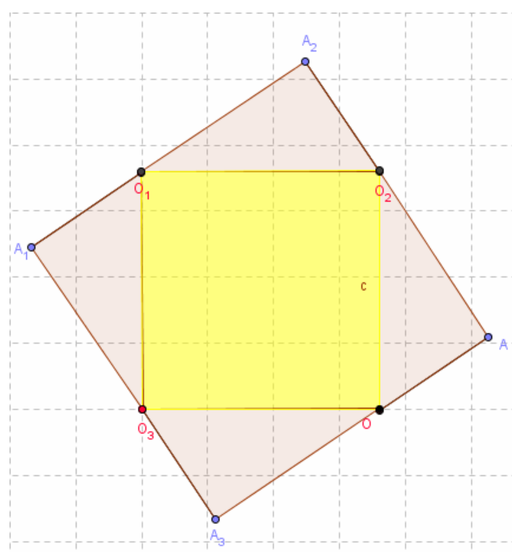


Figura 6: Visualização do Teorema de Pitágoras utilizando GeoGebra

Por outro lado, a figura é composta por um quadrado de lado *c* e por quatro triângulos retângulos de catetos *a* e *b*, logo, sua área também pode ser expressa por:

$$A = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$$

De acordo com as observações feitas nesta atividade, percebemos que:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$
$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

Ou seja,

"A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa"

(Teorema de Pitágoras)

Com procedimentos similares, é possível obter a seqüência ilustrada na figura 7 abaixo, que representa a movimentação das peças da figura utilizando apenas translações e fornecem outra atividade de visualização e comprovação do Teorema de Pitágoras.

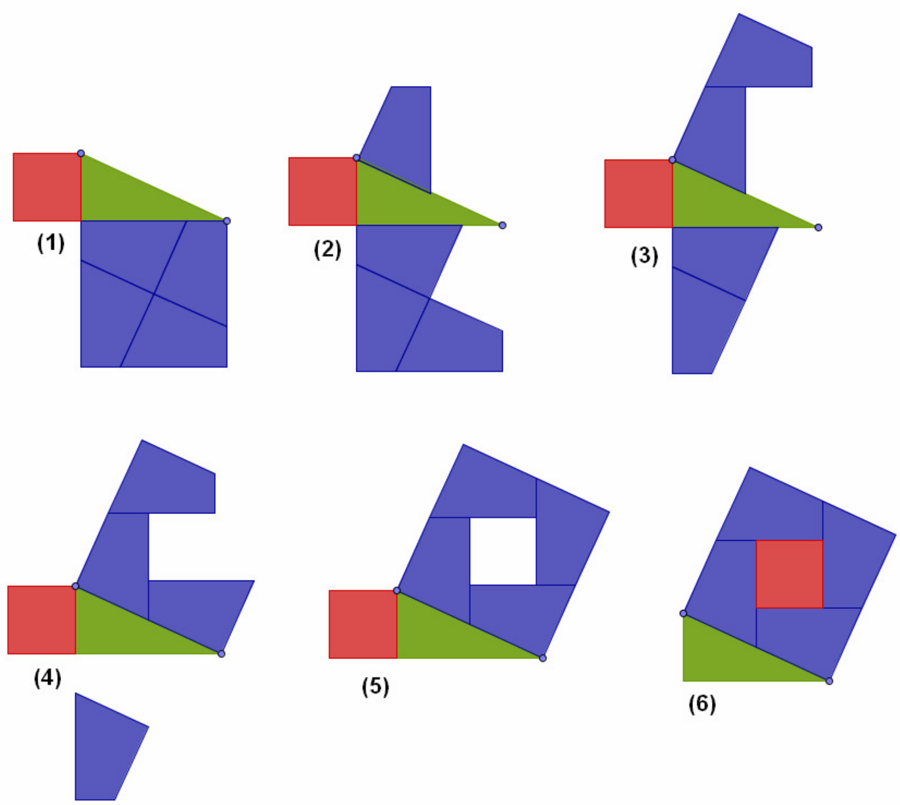


Figura 7: Seqüência de passos para visualização do Teorema de Pitágoras utilizando GeoGebra

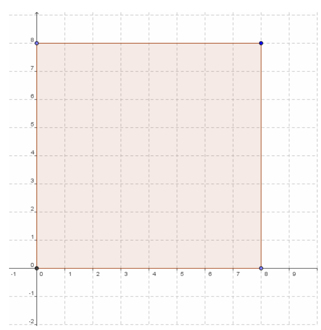
Visualização versus Demonstração

A geometria dinâmica é um forte aliado na visualização e verificação de resultados, contudo o uso deste recurso não dispensa a demonstração formal, que sempre é desejável que seja feita de preferência em sala de aula sem os recursos da tecnologia. Muitas vezes é possível realizar a demonstração utilizando os conceitos desenvolvidos e adquiridos nas atividades de laboratório. A próxima atividade mostra um grave problema que pode ocorrer quando o resultado é tido como verdadeiro simplesmente pelo fato de poder visualizá-lo em certas situações. Nem tudo o que parece, de fato é!

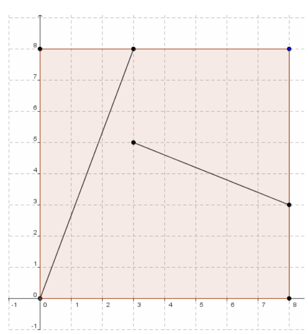
Roteiro de Construção: O problema dos 64 quadrados.

Passo 1: No menu do **Exibir,** selecione as opções **Malha** e **Eixo e** desabilite a opção **Janela de álgebra**.

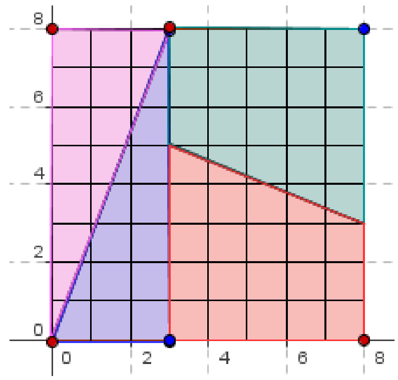
Passo 2: Use a opção **Polígono** (janela 3) e com a ajuda da malha e dos eixos, construa um quadrado de lado medindo 8 (oito) unidades, conforme a figura abaixo:



Passo 3: Usando a opção **Segmento definido por dois pontos** (janela 3), construa dois segmentos, conforme a figura a seguir:



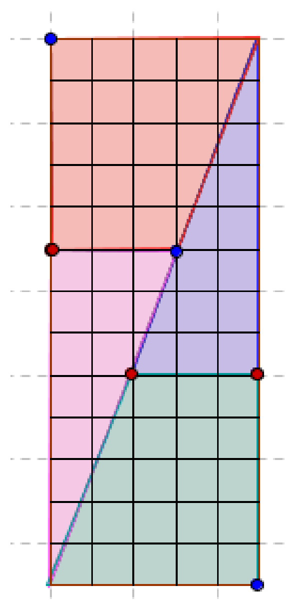
Passo 4: Perceba que com as divisões, foram determinados dois triângulos e dois trapézios.



Passo 5: Construa os triângulos e trapézios que aparecem na figura acima, de modo que possamos transladar e rotacionar as peças sem deformá-las.

Passo 6: Construa um retângulo com base medindo 5 (cinco) unidades e altura medindo 13 (treze) unidades. Note que a área do retângulo é de 65 unidades ao quadrado.

Passo 7: Mova as figuras construídas no passo 5, e encaixe-as no novo retângulo.



Esta visualização motiva o falso resultado de que o quadrado original e este retângulo possuem a mesma área, o que é um absurdo, pois o primeiro possui área 64 e o último área 65.

Da mesma forma que a geometria dinâmica causa a dúvida, ela também esclarece:

Passo 8: Clique na janela 9 e selecione a opção **Ampliar**.

Observa-se que os dois segmentos que formam a diagonal do retângulo não são colineares. Há uma pequena diferença de ângulo, o que proporciona o espaço vazio equivalente a uma unidade de área, proporcionando assim, a diferença entre as áreas das duas figuras, conforme pode ser verificado na figura abaixo:

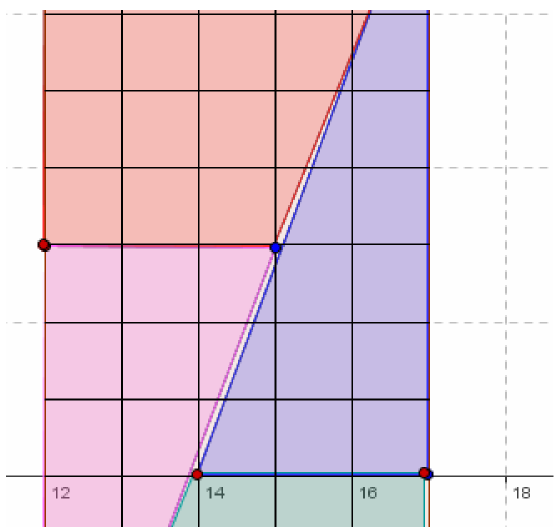


Figura 8: Ampliação da construção do problema dos 64 quadrados

Conclusão

O uso do computador pode trazer grandes benefícios ao ensino, mas é preciso escolher programas adequados para cada área do conhecimento e de acordo com o tipo de atividade e objetivos propostos. Os programas computacionais de Geometria Dinâmica são um forte aliado na sala de aula desde que o computador seja utilizado como recurso pedagógico para o ensino-aprendizagem nas aulas de Matemática. Entretanto a evidência visual pode promover o convencimento do aluno tornando desnecessária a demonstração formal e desta maneira o aspecto lógico do ensino de geometria ficaria prejudicado. Cabe ao professor propor situações e estratégias de ensino que encaminhem o aprendiz para a necessidade da prova formal. Após os experimentos realizados em ambiente computacional é necessário fazer uma pausa para reflexão dos resultados, levantar hipóteses, questionar cada passo da demonstração para compreensão das verdades matemáticas.

As atividades propostas aliadas ao uso adequado dos softwares disponíveis pode tornar o ensino de Matemática muito mais eficiente e significativo.

Bibliografia

[1] Araújo, I.B. *Uma abordagem para a prova com construções Geométricas e Cabri-Géometre*. Dissertação de mestrado, PUC, São Paulo, 2007.

[2] Barbosa, J.L.M. *Geometria Euclidiana Plana*. Sociedade Brasileira de Matemática, 1999. (Coleção do Professor de Matemática).

[3] Baldin, Y.Y.; Villagra, G.A.L. *Atividades com cabri-géomètre II*. São Carlos, Edufscar, 2002.

[4] Borba, M.C.; Penteado, M.G. *Informática e educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

[5] Papert, S. *Computadores e educação.* São Paulo: Brasiliense, 1985.

[6] Vaz, R. L. *O uso das isometrias do software Cabri-Gèométre como recurso no processo de prova e demonstração*. Dissertação de mestrado, PUC, São Paulo, 2004.

[7] Wagner, E. *Construções geométricas*. 4 Ed. Sociedade Brasileira de Matemática, 2000. (Coleção do Professor de Matemática).