Fragmentos de teoria das distribuições

Alysson Tobias Ribeiro da Cunha[1]
Marcos Leandro Mendes Carvalho[2]

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma breve discussão sobre a aplicação da Transformada de Fourier na teoria das distribuições, que é bastante usada para a solução de Equações Diferencias Parciais (EDP). Salientamos que este não pretende ser um texto a ser usado num curso da citada teoria, mas sim de divulgação da mesma, caracterizando-se principalmente pela quantidade de exemplos. Para melhor compreensão, faz-se necessário o conhecimento de Análise, Álgebra linear, e Teoria da Medida.

Palavras-Chave: Teoria da distribuição, transformada de Fourier.

Fragments of distribution theory

Abstract

In this work we present a brief discussion about the Fourier Transform in the distribution theory, which is a useful tool in solving Parcial Diferential Equations (PDE). This text is not meant to be used in a distribution theory course , but only a short report, once there's a great variaty of examples. We take for granted that the reader has basic knowledge on Analysis, Linear Algebra and Measure Theory.

Keywords: Distribution theory, Fourier transform.

[1] Professor do Campus Jataí da Universidade Federal de Goiás
[2] Professor do Campus Jataí da Universidade Federal de Goiás

1 Definições e Exemplos Preliminares

No se segue, dado um conjunto Ω e uma função $f : \Omega \to \mathbf{C}$, o conjunto $supp(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ será chamado de suporte de f. O conjunto$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ indicará as funções infinitamente diferenciáveis cujo o suporte seja compacto. Já a notação $L^1_{loc}(\Omega)$ denota o conjunto das funções integráveis em qualquer conjunto compacto $K \subset \Omega$.

Definition 1. Diz-se distribuição a todo funcional linear contínuo $u : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathbf{C}$. O conjunto de todas as distribuições será denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Example 2. Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Defina

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int f\varphi dx, \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \tag{1}$$

T_f define uma distribuição. Com efeito, sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbf{C}$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle T_f, \varphi + \lambda\psi \rangle &= \int f(x)[\varphi(x) + \lambda\psi(x)]dx \\ &= \int f(x)\varphi(x)dx + \lambda \int f(x)\psi(x)dx \\ &= = \langle T_f, \varphi \rangle + \lambda \langle T_f, \psi \rangle \end{aligned}$$

E dada uma seqüência (φ_j) em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ convergindo para zero, tem-se que existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $S(\varphi_j) \subseteq K$, donde

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi_j \rangle| &= \left| \int_\Omega f(x)\varphi_j(x)dx \right| \\ &\leq \left| \int_\Omega f(x)\varphi_j(x)dx \right| \\ &\leq \sup_{x \in K} |\varphi_j(x)| \int_K |f(x)|dx \to 0, \quad \text{quando j} \to \infty \end{aligned}$$

Portanto T_f é contínua. $\blacksquare$

Example 3.

Dado $a \in \Omega$, defina $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$. O funcional δ_a é uma distribuição. Com efeito, sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbf{C}$. Logo,

$$\langle \delta_a, \varphi + \lambda\psi \rangle = (\varphi + \lambda\psi)(a) = \quad \varphi(a) + \lambda\psi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle \quad + \langle \lambda\delta_a, \psi \rangle$$

Além disto, seja (φ_j) uma seqüência em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ convergindo para zero, donde

$$\langle \delta_a, \varphi_j \rangle = \varphi_j(0) \to 0 = 0(a) = \langle \delta_a, 0 \rangle,$$

Portanto δ_a é contínua. Chamaremos δ_a de *delta de Dirac* concentrada em a.$\blacksquare$

Proposition 4. *Sejam $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que $\langle T_f, \varphi \rangle = \langle T_g, \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Então $f = g$, a menos*

de um conjunto de medida nula.

Demonstração. Sejam K um subconjunto compacto de Ω, $h = f - g$ e $\alpha \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ valendo um em K. Desta maneira $\alpha h \in L^1(\mathbf{R}^n)$, visto que α igual a zero em $\mathbf{R}^n - \Omega$. Daí,

$$\begin{aligned} (\alpha h)_\epsilon(x) &= \epsilon^{-n} \int (\alpha h)(y) \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy \\ &= \langle T_f, \beta \rangle - \langle T_g, \beta \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde $\beta(y) = \epsilon^{-n} \alpha(y) \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Por outro lado, se tomarmos $\epsilon \to 0$ obtemos que $(\alpha h)_\epsilon \to \alpha h$ em L^1, donde $\alpha h = 0$, a menos de um conjunto de medida nula, em Ω. E como $\alpha \equiv 1$ em K, tem-se $f = g$, a menos de um conjunto de medida nula. Resta-nos mostrar que a última igualdade vale para Ω. Para isto, para cada $n \in \mathbf{N}$ considere os conjuntos

$$K_n = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n} \text{ e } |x| \leq n\} \tag{2}$$

Estes são compactos e $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ (Mostre isto!). Aplicando a K_n o que foi mostrado, tem-se que $f = g$ em Ω.

$\square$

2 A Transformada de Fourier

Definition 5. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a transformada de Fourier de f é definida por

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx.$$

Definition 6. Chamaremos de Espaço de Schwartz, denotado por

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)(\text{ou } \mathcal{S})$ ao espaço das funções $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{\alpha}\partial^{\beta} f(x)| < \infty, \; \forall \; \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Definition 7. Chamamos de distribuição temperada a todo funcional linear contínuo $u : \mathcal{S} \to \mathbf{C}$. O conjunto das distribuições será denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ou simplesmente $\mathcal{S}'$.

Example 8. Seja $\langle v.p.\frac{1}{x}, \varphi\rangle = v.p.\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{x\downarrow 0}\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx$. Então $v.p.\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, de fato a linearidade é trivial. Provaremos a continuidade

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx &= \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx \\
&= \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-x)}{x}dx \\
&= \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx \\
&\to \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx \\
&= \int_{0}^{1} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx + \int_{1}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx.
\end{aligned}$$

Logo

\begin{eqnarray*}

$$\begin{aligned}
|\langle v.p.\frac{1}{x}, \varphi(x)\rangle| &\leq \left|\int_0^1 \int_{-x}^{x} \frac{\varphi'(t)}{x}dtdx\right| + \int_1^{\infty} \frac{x|(\varphi(x)-\varphi(-x))|}{x^2}dx \\
&\leq 2\|\varphi'\|_{L^\infty} + 2\|x\varphi\|_{L^\infty}\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} \\
&= 2\|\varphi\|_{0,1} + 2\|\varphi\|_{1,0}C.
\end{aligned}$$

A distribuição $v.p.\frac{1}{x}$ é chamada valor principal de $\frac{1}{x}$.■

Definition 9. Seja $u \in \mathcal{S}'$, então definimos a transformada de Fourier de u por

$$\langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \hat{\varphi}\rangle, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}.$$

A transformada inversa de uma distribuição temperada é definida de uma maneira análoga.

Example 10. *(Transformada de Fourier do Valor Principal)* Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então

$$\langle (v.p.\frac{1}{x})^\wedge, \varphi\rangle \quad = \langle v.p.\tfrac{1}{x}, \hat{\varphi}\rangle = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{|x|\geq\epsilon}\tfrac{\hat{\varphi}(x)}{x}dx \quad = (2\pi)^{-1/2}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\lim_{R\to\infty}\int_{R\geq|x|\geq\epsilon}\frac{1}{x}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}\varphi(\xi)d\xi dx$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\int_{R\geq|x|\geq\epsilon}\frac{1}{x}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}\varphi(\xi)d\xi dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\int_{R\geq|x|\geq\epsilon}\frac{e^{-i\xi x}}{x}dxd\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\int_{R\geq|x|\geq\epsilon}(\frac{\cos\xi x}{x} - i\frac{\sin\xi x}{x})dxd\xi \\
&= -i\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\int_{R\geq|x|\geq\epsilon}\frac{\sin\xi x}{x}dxd\xi.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \pi,$$

temos que

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\lim_{R\to\infty}\int_{R\geq|x|\geq\epsilon}\frac{\sin\xi x}{x}dx = \begin{cases}\pi, & \text{se } \xi > 0\\ 0, & \text{se } \xi = 0\\ -\pi, & \text{se } \xi < 0\end{cases}$$

Definindo a função

$$\mathrm{sgn}(\xi) = \begin{cases}1, & se\ \xi > 0\\ 0, & se\ \xi = 0\\ -1, & se\ \xi < 0\end{cases}$$

Temos

$$\langle (v.p.\frac{1}{x})^\wedge, \varphi\rangle = -i(\frac{\pi}{2})^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\mathrm{sgn}(\xi)d\xi.$$

Portanto

$$\left(v.p.\frac{1}{x}\right)^\wedge(\xi) = -i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\mathrm{sgn}(\xi).$$

Lemma 11. *Seja $f_\epsilon \geq 0$, $f_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int f_\epsilon dx = 1$ e $\int_{|x|>a} f_\epsilon dx \to 0$, com $\epsilon \to 0$, \textrm{para todo} $a > 0$. Então*

$$f_\epsilon \to \delta, \ com\, \epsilon \to 0, \ em\, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Sejam $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dado $\epsilon_0 > 0$, tome $\tilde{\epsilon}$ e $a > 0$ tais que

$$0 < \epsilon < \tilde{\epsilon} \Rightarrow \int f_\epsilon < \frac{\epsilon_0}{4\|\varphi\|_\infty}.$$

e

$$|x| \leq a \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(0)| < \frac{\epsilon_0}{4\|\varphi\|_\infty}.$$

Então

$$\begin{aligned} |\ \langle f_\epsilon, \varphi\rangle - \langle \delta, \varphi\rangle\ | &\leq \int f_\epsilon \mid \varphi(x) - \varphi(0) \mid \\ &= \int_{|x|>a} f_\epsilon \mid \varphi(x) - \varphi(0) \mid + \int_{|x|\leq a} f_\epsilon \mid \varphi(x) - \varphi(0) \mid \\ &< 2\|\varphi\|_\infty \int_{|x|>a} f_\epsilon + \frac{\epsilon_0}{4\|\varphi\|_\infty} \int_{|x|\leq a} f_\epsilon \\ &< \frac{\epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon_0}{2} = \epsilon_0 \end{aligned}$$

Seja H a função de Heaviside, então

$$\widehat{H}(\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\delta(\xi) - \frac{i}{\pi} v.p. \frac{1}{\xi}\right).$$

De fato, sabemos que $H \notin L^1(\mathbb{R})$, então definindo $u_\epsilon(x) = H(x)e^{-\epsilon x}$, temos que $u_\epsilon \in L^1(\mathbb{R})$. Note que $u_\epsilon \to H$ em $\mathcal{S}'$, com $\epsilon \to 0$. Temos ainda

$$(2\pi)^{1/2}\hat{u}_\epsilon(\xi) = \int_0^\infty e^{-(\epsilon+i\xi)x}dx = -\frac{e^{-(\epsilon+i\xi)x}}{\epsilon+i\xi}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\epsilon+i\xi} = \frac{\epsilon}{\epsilon^2+\xi^2} - i\frac{\xi}{\epsilon^2+\xi^2}.$$

Seja $f_\epsilon = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\epsilon}{\epsilon^2+\xi^2}$,

então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon dx = \frac{1}{\epsilon\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{1+\left(\dfrac{\xi}{\epsilon}\right)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^2} = 1$$

e

$$\int_{|\xi|>a} f_\epsilon d\xi \leq \epsilon\frac{1}{\pi}\int_{|\xi|>a}\frac{d\xi}{\xi^2} = 2\epsilon\frac{1}{a^2\pi} \to 0, \text{ com } \epsilon \to 0.$$

Então pelo Lema 11 $f_\epsilon \to \delta \;\; em \;\; \mathcal{S}'$.

Temos também que $\dfrac{\xi}{\epsilon^2+\xi^2} \to v.p.\dfrac{1}{\xi}$ em $\mathcal{S}'$. De fato

$$\langle\frac{\xi}{\epsilon^2+\xi^2},\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi\varphi(\xi)}{\epsilon^2+\xi^2}d\xi = \int_0^\infty\frac{\xi\varphi(\xi)}{\epsilon^2+\xi^2}d\xi + \int_{-\infty}^0\frac{\xi\varphi(\xi)}{\epsilon^2+\xi^2}d\xi = \int_0^\infty\frac{\xi(\varphi(\xi)-\varphi(-\xi))}{\epsilon^2+\xi^2}d\xi.$$

Já vimos também no exemplo 8 que

$$\langle v.p.\frac{1}{\xi},\varphi\rangle = \int_0^\infty\frac{\varphi(\xi)-\varphi(-\xi)}{\xi}d\xi.$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
|\langle \frac{\xi}{\epsilon^2+\xi^2} - v.p.\frac{1}{\xi}, \varphi\rangle| &\leq \int_0^\infty \left| \left(\frac{\xi^2}{\epsilon^2+\xi^2} - 1 \right) \frac{(\varphi(\xi) - \varphi(-\xi))}{\xi} \right| d\xi \\
&\rightarrow 0, \quad com \quad \epsilon \rightarrow 0,
\end{aligned}
$$

pelo Teorema da Convergencia Dominada.

Então de $\hat{u_\epsilon} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(f_\epsilon - \frac{i}{\pi}\frac{\xi}{\epsilon^2+\xi^2}\right)$ temos que $\hat{u_\epsilon} \rightarrow \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\delta(\xi) - \frac{i}{\pi}v.p.\frac{1}{\xi}\right)$ em $\mathcal{S}'$. Como $\hat{u_\epsilon} \rightarrow \hat{H}$, obtemos o resultado.■

Referências

[1] Fernandez, P.J., **Medida e Integração**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.

[2] Bartle, R.G., **The elements of integration**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

[3] Folland, G.B., **Introduction to partial differential equations**. New Jersey, Princeton University Press, 1995.

[4] Folland, G.B., **Real Analysis**. Jonh Wiley, New York, 1984.

[5] Gelfand, I. M. and Shilov, G. E., **Properties and Operations, Vol. I.** Academic Press. New York and London, 1964.

[6] Hounie, G. J., **Teoria Elementar das Distribuições.** Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[7] Iório Jr., R. J. \& Iório, V. M.,**Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1988.

[8] Lima, E.L., **Análise no espaço** $\mathbb{R}^n$. Rio de Janeiro, Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2002.

[9] Lima, E.L., **Espaços Métricos.** Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.

[10] Neto, B. N., **An Introduction to the Theory of Distributions**. New York, Marcel Dekker, 1973.

[11] Rivera, J. E. M., **Introdução às Distribuições** & **EquaçõesDifernciais Parciais.** Rio de Janeiro, Textos de Pós graduação,2004.

[12] Rudin, W., **Real and Complex Analysis.** Mc Graw-Hill, 1966.