Topologia*

Se dividirmos a Matemática nas áreas de álgebra, Análise e Geometria, a Topologia estará dentro da área de Geometria. A Topologia poderia também substituir a área de Geometria e esta, neste caso, ficaria como uma subárea da Topologia. Como área abrangente, a Topologia é a área mais nova da matemática. Ela surgiu no šeculo XIX com os trabalhos de Cantor principalmente, mas também de Riemman. A Topologia pode e deve ser subdividida em:

1. Topologia geral ou conjuntista (Cantor);
2. Topologia diferencial (Riemman, Weyl, Whitney);
3. Topologia algébrica (Euler, Poincaré).

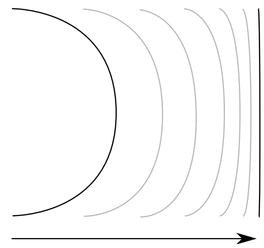
A primeira, que já se pode estudar na graduação, aparece praticamente como linguagem para a análise, com conceitos como aberto, fechado, continuidade, etc. A segunda começa a aparecer quando se quer estudar curvas, superfícies, seus vetores tangentes e funções nelas definidas. A terceira surge como a principal ferramenta para o estudo de propriedades globais dos espaços topológicos, como veremos nesta palestra.

1 Local versus global

Uma propriedade local é uma que depende apenas do que se passa em vizinhanças de pontos. Por exemplo, conceitos de continuidade e de diferenciabilidade são locais, já os conceitos de conectividade e compacidade são globais.

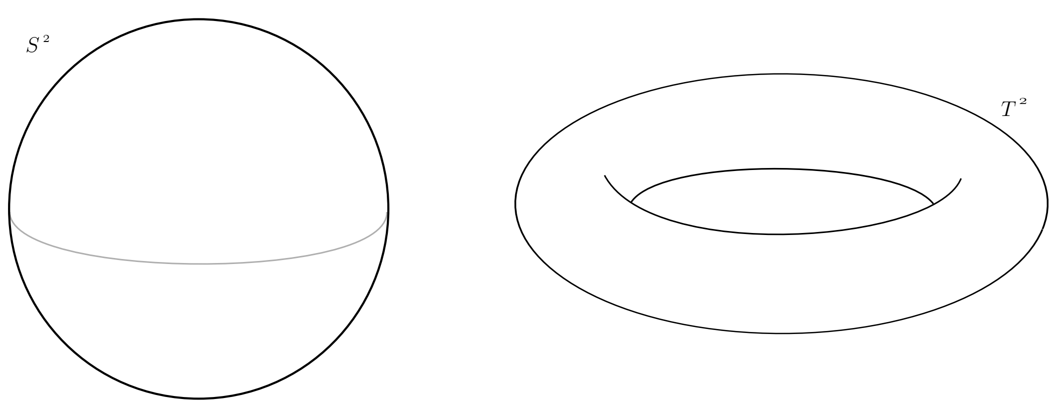
*Palestra apresentada aos alunos do Programa de Verão 2003 do ICMC/USP

É claro intuitivamente que podemos “deformar” um arco de círculo num segmento de reta e vice-versa:



Neste sentido, a menos de deformações, eles são “equivalentes” para os propósitos da Topologia geral. As curvas abaixo são “localmente” equivalentes porque dados os pontos $x \in S^1$ e $y \in S$ é possível conseguir uma vizinhança U de x e uma vizinhança V de y que são equivalentes por “deformação”.

Vemos entretanto que S^1 não é globalmente equivalente a S: não é possível passar de uma para a outra por uma deformação. O mesmo acontece com superfícies, por exemplo, tomando uma esfera S^2 e um toro T^2:

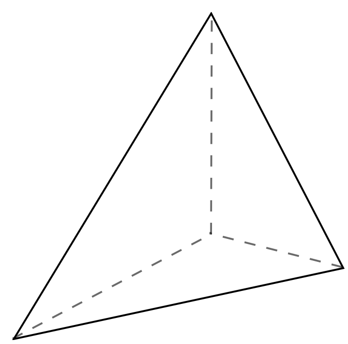


Estas superfícies são também localmente equivalentes mas não globalmente.

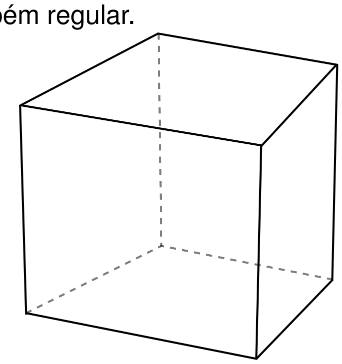
2 Poliedros e característica de Euler

Um poliedro é um sólido (espacial) limitado por faces poligonais planas e limitado como subconjunto do espaço $\mathbb{R}^3$. Vejamos exemplos:

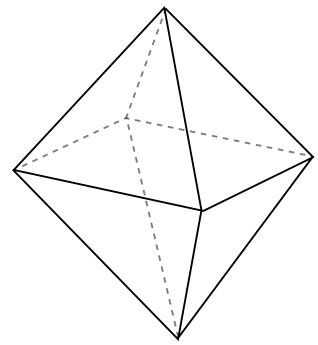
1. O tetraedro (quatro faces). Este tem por faces quatro triângulos, talvez mais conhecido como uma pirâmide de base triangular. Se as quatro faces são triângulos equiláteros, então trata-se de um tetraedro regular.



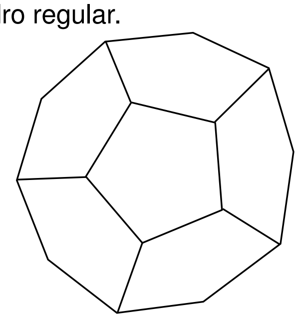
2. O cubo certamente é o mais conhecido dos poliedros. Suas faces são quadrados de mesmo lado e é portanto um poliedro também regular.



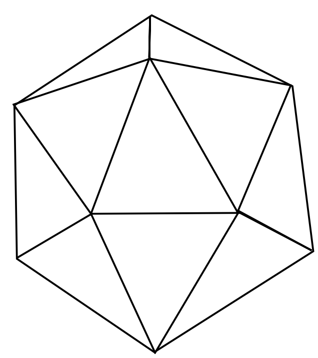
3. O octaedro (oito faces). Se as faces forem triângulos equiláteros iguais teremos o octaedro regular.



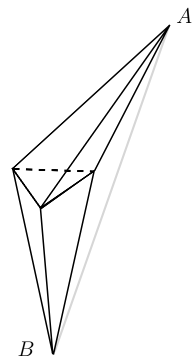
4. O dodecaedro (12 faces). As faces são pentágonos (polígonos com cinco lados) e se forem regulares e iguais temos o dodecaedro regular.



5. O icosaedro (vinte faces). As faces são triângulos e se os triângulos forem equiláteros e iguais temos o icosaedro regular.



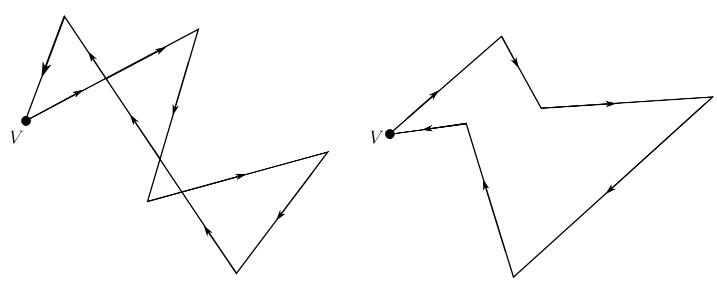
Os cinco poliedros acima, quando regulares, são chamados de poliedros de Platão. Platão não os descobriu, mas os utilizou de modo a torná-los importantes e conhecidos. Os poliedros de Platão tem a propriedade especial de serem convexos, o que quer dizer que todo segmento de reta com extremidades em um destes poliedros, está totalmente contido no poliedro em questão. Temos abaixo um exemplo de um poliedro não convexo.



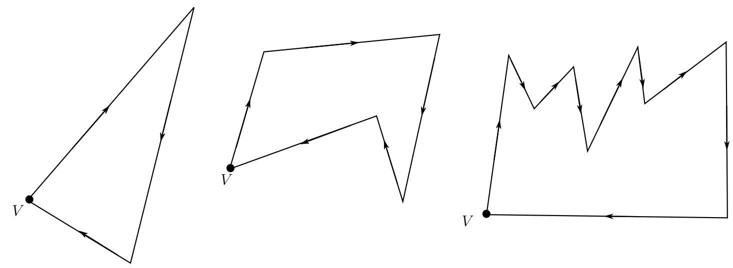
Os pontos A e B estão no poliedro mas o segmento que os une não está contido no poliedro e por isso o mesmo não é convexo.

A conceituação que demos de poliedro inicialmente é ainda muito geral. Para estudarmos poliedros de maneira mais "tratável" impomos mais algumas condições restritivas, como a de conexão ("um só pedaço") e que na fronteira (ou bordo) seja uma "superfície". Para esta exposição não entraremos em tais detalhes.

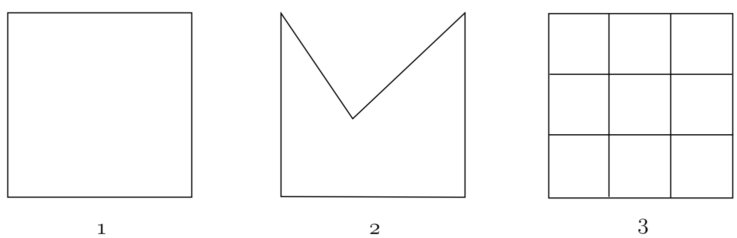
Um poliedro tem vértices (que são os vértices das faces), tem arestas (que são os lados das faces) e tem as próprias faces. Uma poligonal fechada é aquela que, começando a percorrê-la de um vértice, você passará por ela toda e retornará ao mesmo vértice inicial. Exemplos:



Uma poligonal simples é aquela que é fechada e ao percorrê-la uma única vez nunca se passará duas vezes pelo mesmo ponto, a não ser o ponto inicial que coincide com o final. Exemplos:



Chamamos de região poligonal ou face poligonal a uma região plana delimitada por uma poligonal simples. Exemplos:

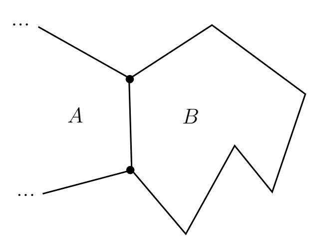


No exemplo 3 a região poligonal é quadrada, as subdivisões não são levadas em conta.

Observe que uma região poligonal, ou face poligonal, tem o número de vértices igual ao número de lados. Sejam V o número de vértices, A o número de lados (ou arestas) e F o número de faces de uma região poligonal e calculemos a soma alternada $V - A + F$. Esta conta, neste caso, é $n - n + 1 = 1$.

Este fato tão simples que parece tolo é importante para poliedros e é o germe de um conceito *extremamente importante para toda Topologia.*

Vejamos o que acontece quando ampliamos a nossa face poligonal juntando-lhe outras. Tal ampliação entretanto deve manter a conexão, ou seja ampliamos juntando-lhe outra face poligonal a partir de vértices ou lados. Examinemos as possibilidades.



A região A é ampliada juntando-se a face B pela aresta. Para A temos $V-A+F=1$ ao juntarmos B alteramos

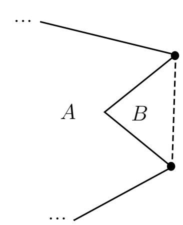
V vértices   passam a ser $V+(n-2)$ vértices

A arestas   passam a ser $A+(n-1)$ arestas

F faces   passam a ser $F+1$ faces

E a soma alternada passa a ser $V+(n-2)-(A+(n-1))+1+1$, o que fornece um resultado igual a 1. A soma $V-A+F$ portanto não se altera.

Outra possibilidade seria adicionar uma face ligando dois pontos da face poligonal dada, como abaixo:



Neste caso, teríamos

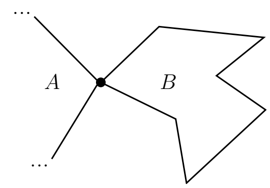
V vértices   passam a ser $V+0$ vértices

A arestas   passam a ser $A+1$ arestas

F faces   passam a ser $F+1$ faces

E novamente a soma alternada $V-A+F$ não se altera.

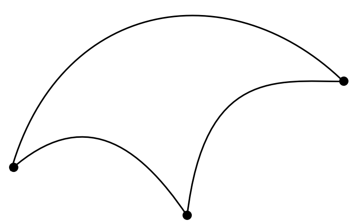
Mais uma possibilidade seria ligarmos outra face através de um único vértice:



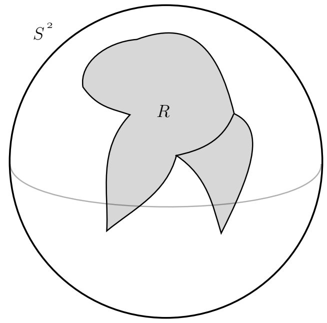
V vértices	passam a ser $V+(n-1)$ vértices
A arestas	passam a ser $A+n$ arestas
F faces	passam a ser $F+1$ faces

E novamente temos $V+(n-1)-(A+n)+F+1=1$; A soma alternada não se altera. O caso geral se decompõe numa sequência destes. Se R é uma região poligonal do plano subdividida em regiões poligonais e contamos os vértices V, as arestas A e as faces F, teremos sempre $V-A+F=1$.

Da mesma forma que “desenhamos” regiões poligonais no plano (inclusive com subdivisões), podemos fazê-lo sobre uma superfície, porém neste caso as arestas não são segmentos de retas e sim curvas que ligam vértices, como abaixo:



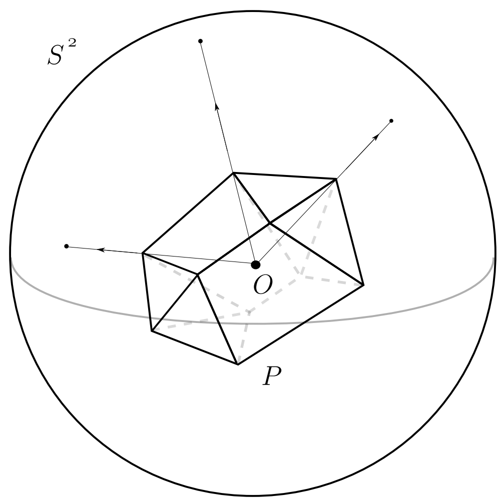
Teremos como primeiro exemplo a esfera S^2.



A “região poligonal” sombreada da esfera tem seus vértices V, suas arestas A e suas faces F. Podemos pensar nesta parte, como se estivéssemos no plano e portanto temos para a soma alternada $V - A + F = 1$.

Porém, na esfera S^2, o complementar desta região é também uma face e devemos aceitá-la como tal, o que torna a soma alternada acrescida de 1 e temos portanto para S^2, $\chi = V - A + F = 2$.

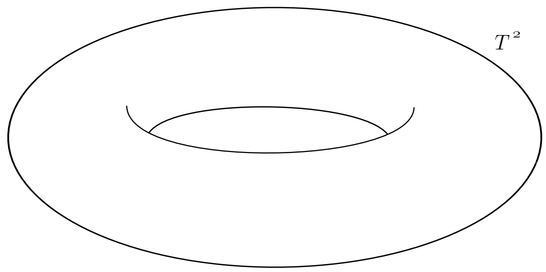
Seja agora P um poliedro com a seguinte propriedade: existe um ponto interior O de P e uma esfera $S_r^2(O)$ de centro O e raio r que contém o poliedro em seu interior e ainda tal que a “projeção radial” do bordo $\overset{\circ}{P}$ de P nesta esfera seja biunívoca e sobrejetora (e neste caso um homeomorfismo). Considere a figura abaixo



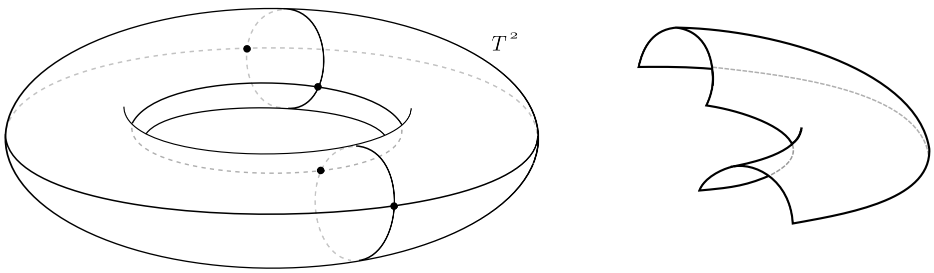
Neste caso, o bordo $\overset{\circ}{P}$ de P é uma “superfície” equivalente (homeomorfa) à esfera $S_r^2(O)$. Por sua vez, o bordo (superfície) $\overset{\circ}{P}$ de P já vem com sua estrutura poligonal dada pelos vértices, arestas e faces. Esta estrutura se transfere para a esfera $S_r^2(O)$ através da projeção radial, e nesta temos $V - A + F = 2$ e portanto para o poliedro também vale $\chi = 2$.

Todo poliedro convexo tem a propriedade explicitada acima e portanto para um poliedro convexo vale $V - A + F = 2$. Porém a propriedade acima (de ter o bordo homeomorfo à esfera) é mais geral.

Vamos chamar de rede uma estrutura (desenho) de regiões poligonais numa superfície. Vimos que para uma rede qualquer na esfera teremos $V - A + F = 2$, o mesmo vale para qualquer superfície homeomorfa à esfera. Caso contrário este valor pode mudar. Vejamos o exemplo da superfície que chamamos de toro T^2, que é a superfície de um pneu.



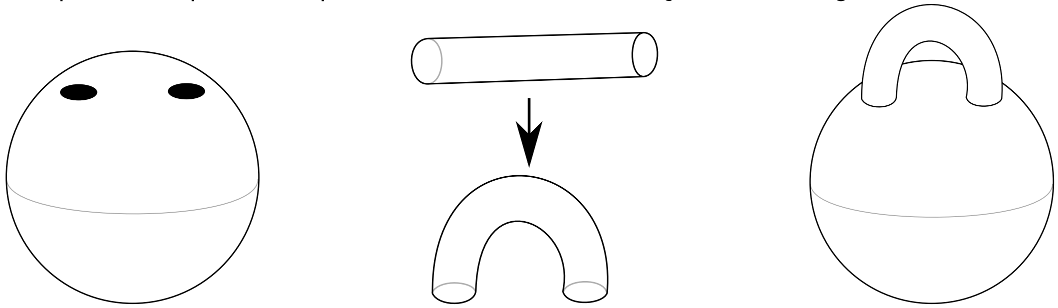
Consideremos uma rede no toro composta por quatro “retângulos” dispostos da seguinte maneira



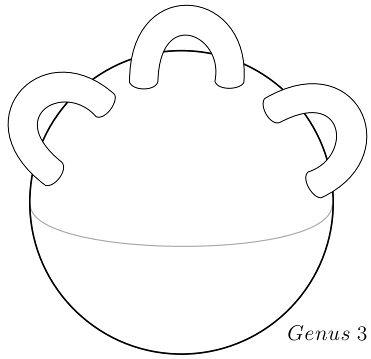
Temos aí $V = 4$, $A = 8$ e $F = 4$, o que nos dá $V - A + F = 4 - 8 + 4 = 0$. Vale porém a propriedade de que este número é sempre o mesmo para qualquer rede no toro T^2.

De um modo geral, se M^2 é qualquer “superfície” fechada, para qualquer rede desta M^2 o número $V - A + F$ é sempre o mesmo e é chamado de Característica de Euler de M^2, denotada por $\chi(M^2) = V - A + F$. Este número é inteiro e pode ser positivo, nulo ou negativo.

Podemos produzir superfícies a partir da esfera, colocando alças como na figura abaixo.



Ou seja, removemos da esfera S^2duas pequenas calotas e colocamos ali o bordo de um cilindro, obtendo assim a esfera com uma alça. Observe que tal superfície pode ser deformada num toro (é homeomorfa a um toro). Podemos repetir o processo colocando alças na esfera. O número de alças é chamado de “genus” da superfície. A esfera S^2 tem genus zero e o toro tem genus 1.



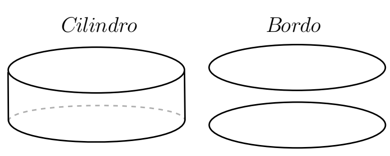
Observe que uma esfera com alças, colocadas como descrito nos desenhos, tem lado de dentro e lado de fora. Superfícies com esta propriedade são ditas orientáveis. As esferas com alças são bastante gerais, no seguinte sentido: dada uma superfície fechada e orientável qualquer M^2, ela é homeomorfa (deformável) numa esfera com alças. Portanto, uma superfície fechada e orientável M^2 fica caracterizada pelo seu genus $g(M^2)$ e há uma relação muito simples entre o genus e a característica de Euler numa superfície, que é $\chi(M^2) = 2 - 2g(M^2)$.

Vemos daí que $\chi(M^2)$ é sempre par para superfícies fechadas e orientáveis e também que podemos obter $g(M^2)$ em função de $\chi(M^2)$:

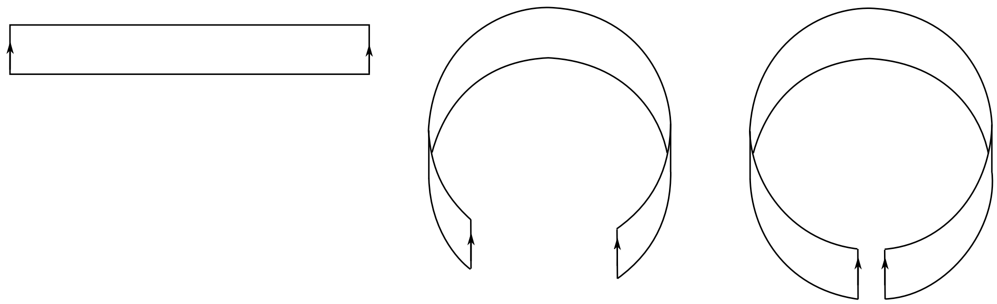
$$g(M^2) = 1 - \frac{\chi(M^2)}{2}$$

e percebemos ainda que o número par $\chi(M^2)$ determina a superfície: pelo que vimos acima, variando-se a superfície M^2, $\chi(M^2)$ pode assumir qualquer valor par menor ou igual a 2.

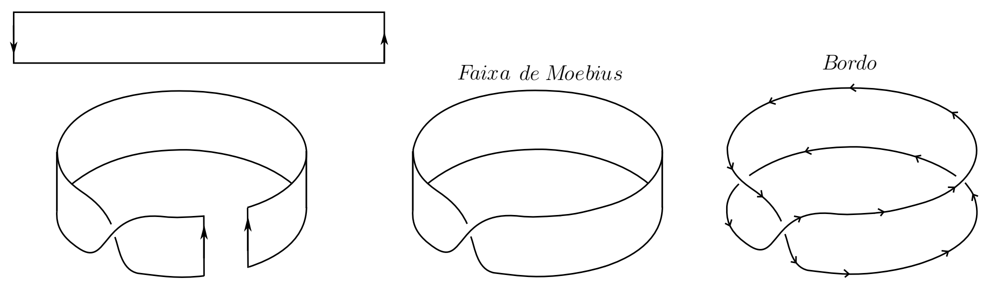
Vamos apresentar agora os tipos de superfícies não orientáveis, mas antes vamos examinar a superfície cilíndrica (o cilindro). Esta superfície não é fechada, tem bordo e podemos desenhá-la assim:



Veja que o bordo do cilindro é formado por dois círculos (não é conexo). Podemos construir o cilindro com uma fita de papel, colando suas extremidades como indicado na figura abaixo:



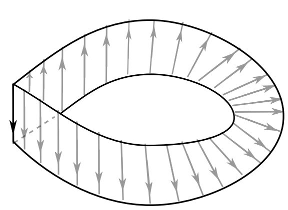
A figura não orientável mais simples tem um parentesco com o cilindro. Ela também não é fechada e é chamada de faixa de Moebius (leia-se mêbius). Ela pode ser obtida também a partir de uma fita de papel em que colamos suas extremidades, porém com orientação trocada, veja:



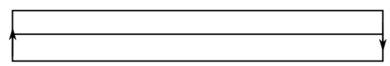
Note que devemos torcê-la de 180° antes de colar.

Observe que o bordo da faixa de Moebius é conexo (só um pedaço) enquanto que o bordo do cilindro tem dois pedaços. Isto nos mostra que uma construção não pode ser deformada na outra (elas não são homeomorfas!). O cilindro tem dois "lados" (dentro e fora), mas a faixa de Moebius tem só um lado. Se você percorre a faixa de Moebius a partir de um ponto P, sem deixar a faixa, quando retornar a P na primeira volta, estará "no outro lado", ou seja, não existe o "outro lado".

Se suavizarmos a torção de 180°, podemos desenhá-la assim:

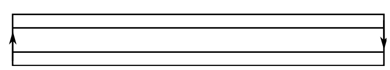


Ao darmos uma volta na faixa invertemos a orientação da flexa. Se você percorrer o bordo verá que é uma curva fechada. Em sua casa, faça a seguinte experiência: com uma fita de papel de cerca de 40 centímetros de comprimento por 4 centímetros de largura, risque longitudinalmente a linha do meio, como abaixo:



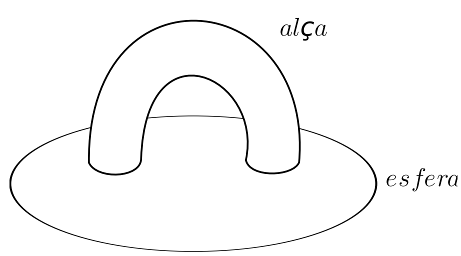
Depois faça a torção de 180° e cole as extremidades. Feita a faixa de Moebius, com uma tesoura, corte a mesma nesta linha do meio e surpreenda-se.

Pegue uma nova fita do mesmo tamanho e risque longitudinalmente duas linhas na posição de um quarto de largura, como abaixo:

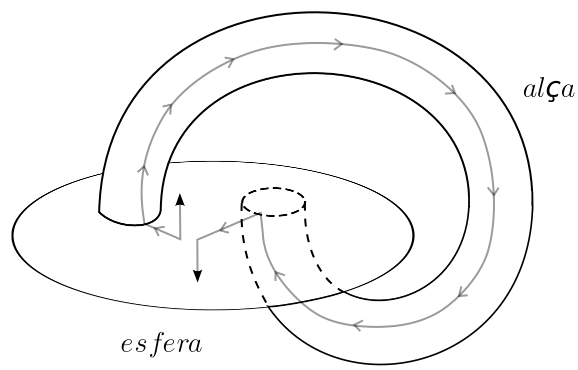


Depois de colar e ter a faixa de Moebius, corte com uma tesoura ao longo destas linhas e terá outra supresa!

Vejamos o que pode acontecer na construção da esfera com alças. Da forma que indicamos anteriormente obtemos os modelos das superfícies fechadas e orientáveis. Examinemos agora o que acontece se colocarmos as alças diferentemente. Para isto tomaremos apenas uma pequena região da esfera e façamos as colagens das alças.

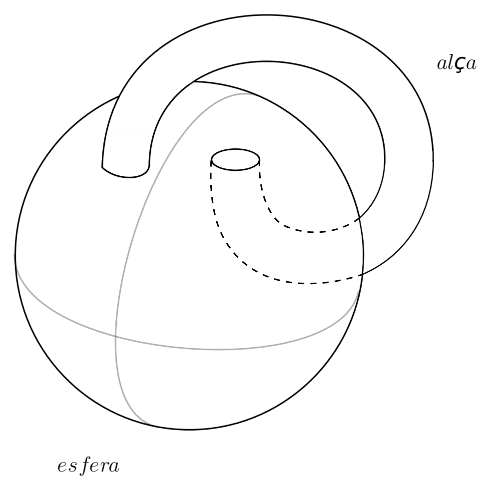


Na figura acima, a colagem da alça foi feita como antes. Digamos que cometemos um erro na hora de colar e façamos assim:



Com tal colagem obtemos uma superfície que que nos permite passar do lado de fora da esfera para o lado de dentro. Observe isso percorrendo a curva γ. Tal superfície portanto só tem um lado e é assim não orientável.

Observe que ao fazermos estas colagens fomos obrigados a cruzar a mesma esfera com a alça, ou seja, nossa superfície passa a ter auto-intersecção.



A superfície assim obtida é chamada de Garrafa de Klein. Ela é fechada mas não orientável. Esta auto-intersecção é inevitável em nosso espaço tridimensional. A garrafa de Klein pode ser concebida no espaço de dimensão 4 ($\mathbb{R}^4$) sem auto-intersecção.

Se colocarmos na esfera g alças da forma descrita acima, teremos uma superfície fechada N^2, não orientável cuja característica de Euler é dada por $\chi(N^2) = 2 - 2g$. Então quando damos a característica de Euler de uma superfície fechada dada por esferas com alças, esta estará sempre associada a duas superfícies, uma orientável e outra não orientável.

Podemos ainda produzir superfícies fechadas N^2 a partir da esfera removendo apenas uma pequena calota e colocando ali o bordo de uma faixa de Moebius e se colocarmos k faixas de Moebius obtemos a superfície não-orientável com característica de Euler $\chi(N^2) = 2 - k$. Não é possível conceber tal N^2 em $\mathbb{R}^3$ sem auto-intersecções (no $\mathbb{R}^4$ sim!).

A característica de Euler foi descoberta muito antes por Descartes, mas tendo sido redescoberta por Euler e usada por ele, ficou com o seu nome. Tal noção foi generalizada por Poincaré e se tornou pedra fundamental para a área de Topologia Algébrica. Podemos dizer que esta se desenvolveu sob o signo da característica de Euler-Poincaré.

Antônio Conde[1]

[1] Antônio Conde é professor aposentado pela USP.